This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

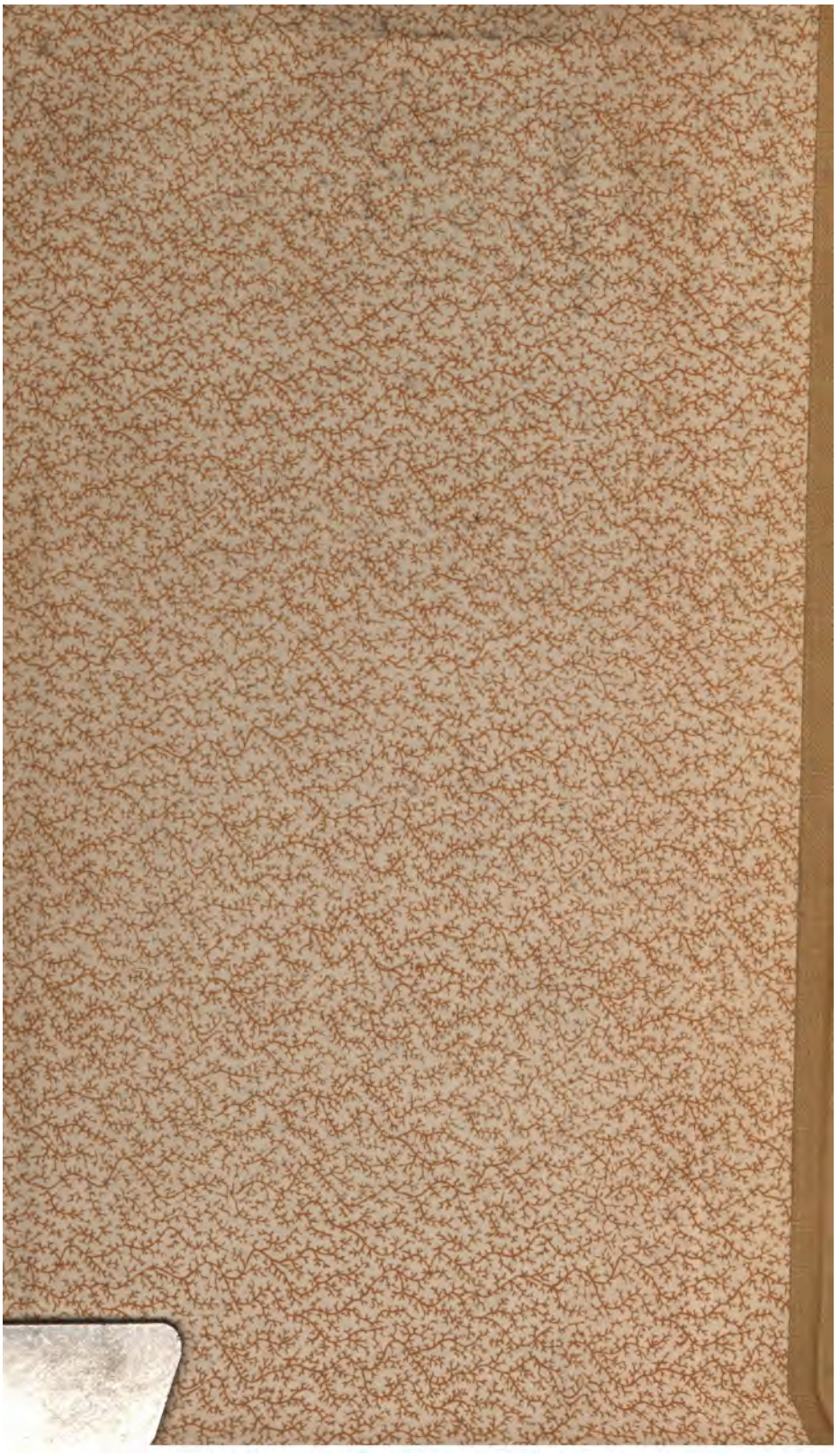
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

RESEARCH LIBRARIES
33 06910453 1



655919
☆ Joseph de Perott.
2 Dec. 1915.

DIE

ALLGEMEINE FUNCTIONENTHEORIE.

ERSTER THEIL.

Du Bois-Reym
OIN

DIE ALLGEMEINE

FUNCTIONENTHEORIE

VON

PAUL DU BOIS-REYMOND.

NEW YORK PUBLIC

ERSTER THEIL.

METAPHYSIK UND THEORIE DER MATHEMATISCHEN GRUNDBEGRIFFE: GRÖSSE, GRENZE, ARGUMENT UND FUNCTION.

TÜBINGEN, 1882.
VERLAG DER H. LAUPP'SCHEN BUCHHANDLUNG.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
655210
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS.
R 1914 L

Das Recht der Uebersetzung ist vorbehalten.

Druck von H. Laupp in Tübingen.

Seinem

Bruder Emil du Bois-Reymond

gewidmet

vom Verfasser.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Vorwort.

Wie mich einst das Bedürfniss nach genauer Einsicht in die vielgestaltige Natur der Integrale partieller Differentialgleichungen II. Ordnung hinwies auf die Untersuchung der Darstellungsformeln im allgemeinsten Sinne, diese sodann Vertiefung heischte in das Wesen voraussetzungsloser Functionen und ihrer Integrale, über welches ich zu voller Klarheit erst gelangte und gelangen konnte durch erkenntnisstheoretische Zergliederung der analytischen Grundbegriffe von Grösse und Grenze: so will ich jetzt in dem Werke, dessen I. Theil hier vorliegt, denselben Weg rückwärts, doch hoffentlich in kürzerer Zeit, zurücklegen.

Es handelt sich in der That um einen Inbegriff von Lehren, der wohl verdient durch gesonderte Darstellung festgelegt zu werden, und dessen Grundidee sogleich einleuchtet, wenn man an die Eintheilung der medicinischen Wissenschaften denkt. Hier werden speciellen Disciplinen allgemeine gegenübergestellt, wie der speciellen Anatomie, Pathologie u. s. w. die allgemeinen gleichnamigen Lehren. So auch möchte es angemessen sein, wenn in der Analysis eine specielle und eine allgemeine Functionentheorie unterschieden würde.

Indem jene in allgemeinster Weise die Functionen complexer Veränderlichen erforscht, ist ihr Ziel Functionen von vorgeschriebenen Eigenschaften darzustellen und die Natur grosser Klassen von Transcendenten, vornehmlich solcher, die zu den algebraischen Functionen in gewissen Beziehungen stehen, zu studiren.

Die allgemeine Functionentheorie denke ich mir Alles umfassend, was mit dem allgemeinsten Functionsbegriff zusammenhängt: An der Spitze die Metaphysik des Grössen- und Grenzbegriffs als Grundlage für die Theorie des Arguments, der Function und der für die Convergenz und Divergenz der verschiedenen unendlichen Operationen gemeinsamen Bedingung. Dies, beiläufig bemerkt, sind die Lehren, welche der I. Theil meines Werkes enthält. Sodann die allgemeine Reihentheorie, die Lehre von der Integrabilität und Differenzirbarkeit der Functionen, und die allgemeinen Sätze über das bestimmte Integral. Weiter die Theorie der Darstellung von sogenannten willkürlichen Functionen durch Integral- und Reihenformeln, besonders die Fourier'schen Darstellungen, insofern sie den Functionsbegriff verschärfen. Endlich damit im Zusammenhang stehende Theile der Theorie der partiellen Differentialgleichungen II. Ordnung.

Sonach bildet, kurz gesagt, den Inhalt der allgemeinen Functionentheorie die Theorie der Grössenbeziehungen und Operationen im Allgemeinen, d. h. ohne dass die Darstellung besonderer Abhängigkeiten Hauptzweck würde.

Seit ich, zuerst im Jahre 1872, eine Schrift solchen In-

halts doch mit anderem Titel ankündigte, sind Werke erschienen, die ähnliche Ziele verfolgen. Wenn ich ihnen auch manches Werthvolle entlehnen werde, wie z. B. Herrn U. Dini wichtige Sätze über Nichtdifferenzirbarkeit von Functionen, so wird man doch finden, dass meinem Werk weder in Bezug auf Plan, noch auf wesentlichen Inhalt zuvorgekommen ist. Dies gilt gewiss von diesem I. Theil, doch nicht minder von den folgenden, z. B. von dem nächsten Heft, dessen Gegenstand die allgemeine Reihentheorie ist, und in welchem ich, ausser schon in Abhandlungen Mitgetheiltem, manches Neue bringe.

Wie angegeben, enthält der vorliegende Theil die erkenntnisstheoretische Untersuchung des Grössen- und Grenzbegriffs und die Anwendung ihrer Ergebnisse auf die Lehre von Argument und Function. Das erkenntnisstheoretische Problem glaube ich *ad assem* gelöst zu haben, und für die Richtigkeit der Lösung bürgt u. A., dass sie in der Analysis jüngst aufgetretene Paradoxien auf das Natürlichste erklärt.

Der Begriff der analytischen Grenze, oder, worauf es schliesslich allein ankommt, der Decimalbruchgrenze entspringt gewissen Vorstellungs-Successionen, denen, wie ich bei einer anderen Gelegenheit zeigen werde, eine noch viel umfassendere Bedeutung innewohnt. Jenachdem man grundsätzlich diese Folgen von Vorstellungen einmal abbricht, oder ihr ideales Ende in das Denken einführt, entsteht eine zweifache Anschauungsform, deren Trennungslinie durch die ge-

sammte erkenntnisstheoretische Speculation fortgesetzt werden kann.

Da die Vorstellungen, als einfachste Bestandtheile des Denkens, die Combinationselemente erkenntnisstheoretischer Untersuchungen sind, so ist solchen, also auch unserer Untersuchung über die analytischen Grundbegriffe eine genügende Erklärung dessen, was unter Vorstellung zu verstehen sei, voranzuschicken. Die Bedeutung des Wortes ist in der That nicht ohne Weiteres klar, obschon man im Allgemeinen dabei Dasselbe und das Richtige sich denken mag. Ist doch Licht oder Ton, Schmerz, Wille, kurzum Alles, was vor die Seele tritt, mag es Wahrnehmung, Empfindung, Strebung heissen, zugleich Vorstellung, oder, genauer gesagt, man hat davon eine Vorstellung. Wie nun trennen sich diese Begriffe? Ich meine so:

Vorstellung ist alles Bewusstwerdende, was Gegenstand des Gedächtnisses werden kann, und ist es in der Beschaffenheit, in welcher es vom Gedächtniss aufgenommen wird. Dieser Inbegriff enthält natürlich auch alles beim Denken aus dem Gedächtniss vor das Bewusstsein Tretende.

Tübingen, im Februar 1882.

Inhaltsverzeichniss.

Ueber den Grössen- und Grenzbegriff.

Seite

Einleitende Bemerkungen und Angabe der einfachsten Gestalt des Hauptproblems 1. Ueber die Grundsätze und Methoden der Analysis, in denen der Grenzbegriff die Hauptvoraussetzung bildet 4. Kurze Uebersicht über die folgende Untersuchung 10.

Cap. I. Ueber mathematische Grössen.

Einleitung 14

Discrete mathematische Grössen 16. Erläuterung zur Begriffsbildung 17. Discrete mathematische Grössen. Fortsetzung 17. Ueber die stetigen mathematischen Grössen 20. Das Gemeinsame der vorher angeführten Grössen mit den geometrischen Grössen 21. Einführung des lineären Grössenbegriffs 23. Was der Ausdehnung oder dem Grade nach abgestuft ist, gehört zu den lineären Grössen 24. Die Grössen der äusseren Wahrnehmungswelt 27. Die Grössen der inneren Wahrnehmungswelt. Nach dem Grade abgestufte Empfindungen 28. Nicht dem Grade nach abgestufte Empfindungsfolgen, welche zwar mathematische Grössen sind, aber keine lineäre 34. Sofern die Stimmungen als mathematische Grössen aufgefasst werden können, sind es sicher lineäre 37. Die in der Mathematik selbst zum Vorschein kommenden Grössen sind zum Theil nicht lineär 38. Endlich treten im gesellschaftlichen Verkehr mathematische Grössen auf, die Nichts mit den bisher angeführten gemein haben 39. Alles Bisherige weist darauf hin, dass wir vor-

Seite

nehmlich den lineären Grössenbegriff auf das Genaueste zu untersuchen haben 41. Schärfere Definition des lineären Grössenbegriffs 43. [Kennzeichnung durch Vergleichung ohne Maassvorstellung — mit Maassvorstellung.]

Grösse, Zahl und literaler Formalismus.

Die Einheit und die Eins 48. Ueber die Zahlen als Zeichen und als Grössen und über den Formalismus 50. Endgültige Fassung des Problems über den Grenzbegriff 56.

Die idealistische und die empiristische Anschauungsweise über Grenze und Grösse in der Analysis.

Der Idealist entwickelt das idealistische System.

Er stellt fest, dass das Dasein der Grenze eines Beweises bedarf 58. Ueber die Beweismethoden für das Vorhandensein der Grenze 60. Die bisherige Betrachtungsweise war nicht erschöpfend. Der Idealist vervollständigt sie in seinem Sinne 67. Ueber die Begriffe unbegrenzt und unendlich 69. Das Unendlichkleine und seine Haupteigenschaften 71. Der Grenzbegriff und die Zahlen 76. Die Null und das Unendlichkleine 79. Ueber die verschiedenen Auffassungen des Unendlichkleinen in der Mathematik 83. Kurzer Rückblick auf das idealistische System 85.

Empiristische Critik des idealistischen Systems.

Der Empirist wünscht Auskunft vom Idealisten über endlose Decimalbrüche, die nach einem Gesetz und solche, die ohne Gesetz fortschreiten 87 und erhält sie 90. Sodann deckt der Empirist die idealistische Grundvoraussetzung auf 92. Die Idee vom genauen Maass wird der empiristischen Critik unterzogen 96. Die Existenz des genauen Maasses wird idealistisch begründet 101. Ueber die doppelte Auffassung der geometrischen Ideale 106. Schluss der empiristischen Critik des Idealismus 108. Antwort des Idealisten 110.

Der Empirist entwickelt das empiristische System.

Die empiristische Reinigung des Begriffssystems 115. Anwendung der empiristischen Principien auf die analytischen Ausgangsvorstellungen. Vorbemerkungen 116. Empiristische Vorstellung von den geometrischen Gebilden 119. Der Grenzbegriff 120. Die Empiristik in den Elementen der höheren Analysis 123. [Auffassung von Argument, Differential etc. 123. Das Argument oder die unabhängige

Seite

Veränderliche 125. Die empiristischen Grundprincipien der Differentialrechnung 128. Ueber die Rechnung mit Differentialen nach empiristischer und nach idealistischer Auffassung 132. Ueber eine Mittelauffassung des Differentials 140. Einige Bemerkungen über anorthoide Functionen 142.] Schlussbemerkung des Empiristen 144. Schlussbemerkung des Idealisten 146.

Cap. II. Schlussbetrachtungen über den Idealismus und den Empirismus und über den Grenzbegriff.

Verhältniss des idealistisch-empiristischen Gegensatzes zur bisherigen Auffassung der analytischen Grundbegriffe 152. Die neutrale Darstellungsweise der Functionentheorie 154. Uebersicht über die Fortsetzung unserer Untersuchung 157. Die erste Entwickelungsstufe des Grenzbegriffs 158. Der wissenschaftliche Grenzbegriff 163. Ueber die Grenzen discreter und continuirlicher Werthfolgen 165. Vergleichung der Grenzen discreter Werthfolgen 168.

Cap. III. Ueber das Argument.

Vorbemerkungen und Uebersicht 177. Die Theilung der Argumentstrecke 180. Erste und allgemeinste Eintheilung der Punctsysteme auf der Argumentstrecke 182. Ueber die Eintheilung der pantachischen Punctvertheilungen 184. Die apantachischen Punktvertheilungen 185. Ueber allgemeine Eigenschaften unbegrenzter Vielheiten. Der Abzählbarkeitsbegriff 191. Ueber die relative Mächtigkeit der Vielheiten 196. Idealistisch-empiristische Kritik der obigen Theorie des Arguments 200. Schlussbemerkungen über das idealistische und das empiristische Argument und Festsetzung der neutralen Darstellungsweise 206. Ueber die Punctvertheilungen 213. [I. Pantachien. II. Apantachien. III. Punctsysteme, die sich nicht in eine endliche Anzahl pantachischer Strecken zerlegen lassen.

Cap. IV. Ueber die Function.

Vorbegriffe über die Function 215. Einige Beispiele von Functionen 221. Directe und indirecte Functionswerthe 223. Ueber den Sprungwerth der Functionen 229. Ueber die Stetigkeit der Functionen in einzelnen Puncten des Argu-

Seite

ments 231. Ueber die Stetigkeit von Functionen durch ganze Intervalle 233. Ueber die anorthoide Stetigkeit 241. Ueber die numerische Construction hypothetischer Functionswerthe 244.

Cap. V. Ueber den Endverlauf der Functionen.

Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip und der Endverlauf der Functionen, deren Argument ins Unbegrenzte wächst 256. Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip. Vorbemerkung 258. Das allgemeine Convergenzprincip mit seinen begleitenden Sätzen 260. Die Unbestimmtheitsgrenzen 266. Das allgemeine Divergenzprincip 270. Die Theorie der Unbestimmtheitsenveloppen 271.

Angabe einiger störenden Druckfehler.

Seite 6, Zeile 16 u. 21 v. o.; S. 258, Z. 2 v. u.: lies x statt f, $f(x_1)$ statt $x(x_1)$, x statt f(x

» 15, » 6 muss *einschliessender* stehen.

» 19, » 2 von unten ist *sich* fortzulassen.

» 31, » 3 und 4 von unten ist *endlich* fortzulassen

» 36, » 12: *mathematische*

» 43, » 15: *geholfen*

» 60, » 4 von unten: $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_q < 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$

» 61, » 5: $\frac{1}{10^p}$

» 88, » 8: < 1, Zeile 11: *welchem.*

» 108, » 15: *unseren Federn*

» 144, » 18: *geschriebene) Bedeutung*

» 176, » 1: $\alpha_0, \sigma_1 \alpha_2 \ldots$

Ueber den Grössen- und Grenzbegriff.

Einleitende Bemerkungen
und
Angabe der einfachsten Gestalt des Hauptproblems.

Mit dem Namen Grenzbegriff bezeichnet man in der Mathematik ein gewisses Schlussverfahren, vermöge dessen aus der Art der Aufeinanderfolge von Werthen, die sich messen oder beobachten lassen, auf das Dasein von Werthen geschlossen wird, die der Wahrnehmung gänzlich entzogen sind, und deren Vorhandensein sich auch nie im gewöhnlichen Sinne beweisen lassen wird. Trotzdem sind wir gewöhnt, bei diesem beständig zur Anwendung kommenden Schlusse ohne Weiteres uns zu beruhigen.

Zwar sind bekanntlich Schlüsse auf das wirkliche Vorhandensein durch keinerlei unmittelbare oder mittelbare Wahrnehmung nachweisbarer Objecte manchen Lehrgebieten ganz geläufig, indem man auf allgemein verbreitete Anschauungs- und Empfindungsweisen sich beruft. Allein muss es nicht befremden, wenn eine kaum bindendere Denkform die unentbehrlichsten und fruchtbarsten Grundlehren gerade der Mathematik sicherstellen soll, einer Wissenschaft, welche doch vor allen Anderen der peinlichsten und reinlichsten Folgerichtigkeit sich rühmt, und solchen Ruhmes auch unstreitig mit jedem Tage würdiger sich erweist?

Welcher Mathematiker möchte läugnen, dass — namentlich in ihrer publicistischen Erscheinung — der Grenzbegriff und seine nächsten Verwandten, die Begriffe vom Unbegrenzten, Unendlichgrossen und Unendlichkleinen, von den Irrationalen, u. s. f. noch immer der Festigkeit entbehren! Der Lehrer in Schrift und Wort pflegt diesen bedenklichen Zugang zur Analysis mit raschen Schritten zu durcheilen, um auf den wohlgebahnten Wegen des Calcüls desto behaglicher sich zu ergehen.

Man geht indessen selten fehl, wenn man das Merkwürdigste abseits von den Wegen der Menge sucht. Wohlan, so unternehmen wir es, gerade jenes gemiedene Gebiet zu erforschen.

Wie zu vermuthen war, erkennen wir bald, dass die Schwierigkeiten der erwähnten Begriffe nicht mathematischer Natur sind. Sie wären längst beseitigt. Sie wurzeln vielmehr in den einfachsten Bestandtheilen unseres Denkens, den Vorstellungen.

Die Lösung des Räthsels, wenn sie mir gelang, ist, dass es ein Räthsel bleibt und bleiben wird. Allein dieses Räthsel ist, scheint es, auf seinen einfachsten psychologischen Ausdruck gebracht. Die ausdauerndste Beobachtung unseres Denkvorgangs und seiner Beziehungen zur Wahrnehmung führt eben nicht darüber hinaus, dass es zwei durchaus verschiedene Auffassungsweisen giebt, welche gleiches Anrecht darauf haben, als Grundanschauungen der strengen Wissenschaft zu gelten, weil keine von ihnen ungereimte Ergebnisse liefert, wenigstens so lange es sich um die reine Mathematik handelt. Und wo in andern Wissenschaften die eine von diesen Denkformen schliesslich auf Widersprüche zu führen

scheint, erträgt die Mehrzahl der Denker bis auf den heutigen Tag lieber dieses Ungemach, als auf die entsprechende Weltanschauung zu verzichten.

Immerhin bleibt es eine höchst befremdliche Erscheinung, dass nachdem Alles, was die Wahrheit verbergen konnte, hinweggeräumt, und man erwarten durfte, endlich ihr Bild klar und unzweideutig zu erblicken, sie unter zweierlei Gestalt vor uns erscheint. Der, welcher zuerst durch wasserhellen Krystall das doppelte Bild des einfachen Gegenstandes bemerkte, mag es nicht ergriffener seinen Freunden gezeigt haben, als ich heute am Ende sorgfältigsten und unverdrossensten Ueberlegens die doppelte Anschauungsweise über die Grundlagen unserer Wissenschaft vor dem Leser zu entwickeln mich entschliessen muss.

Diese beiden Vorstellungsweisen nenne ich, im Anschluss an geläufige Begriffe, mit denen sie in ihrer genauen Durchführung freilich wenig mehr gemein haben, Idealismus und Empirismus. Um beide kurz zu kennzeichnen, so glaubt der Idealismus an die Wirklichkeit unwahrnehmbarer, unvorstellbarer, durch unsern Denkvorgang geforderter Begriffsgrenzen. Der Empirismus ist das System vollständiger Entsagung und giebt als vorhanden oder Vorhandenem entsprechend nur das Wahrnehmbare zu, deckt sich also keineswegs mit dem classischen Pyrrhonismus.

Wir bezeichneten den Grenzbegriff als das Problem, welchem die in Rede stehenden Untersuchungen gelten, und müssen deren Ziel nun deutlicher beschreiben.

Indem wir zu diesem Zweck der Frage nach dem Sinn einer endlos fortzusetzenden Rechnungsvorschrift, einer sogenannten unendlichen Operation, ihre allgemeinste abgezogendste

Form zu ertheilen suchen, wird sich uns sogleich auch die denkbar einfachste Gestalt des Schlusses zeigen, dessen mannigfache Erscheinungsform in der Analysis bisher noch immer nicht gegen den Vorwurf logischer Unstrenge gedeckt war. Und in dieser einfachen Gestalt soll dieser Schluss alsdann zergliedert werden bis zu voller Befriedigung unseres Erkenntnisstriebes, der eben vor einer wirklichen Grenze unseres Erkenntnissvermögens sich auch beruhigen muss.

Ueber die Grundsätze und Methoden der Analysis, in denen der Grenzbegriff die Hauptvoraussetzung bildet.

Es bezeichne f(x) eine Folge von Vorstellungen, die mit einer andern Folge von Vorstellungen x in der Weise verbunden ist, dass zu jeder besondern Vorstellung x eine besondere Vorstellung f(x) gehört.

Dieser allgemeinsten Form des Begriffs der eindeutigen Function oder Abhängigkeit entspricht auch die allgemeinste Schlussform des mathematischen Grenzbegriffes, sobald man unter den Vorstellungen Zustände sich denkt, die mit anderen derselben Art numerisch vergleichbar sind, so dass man an die Stelle von Vorstellung oder Zustand ihr numerisches Maass, ihren sogenannten Werth setzen darf. Es wird dann x eine Folge von in Zahlen ausdrückbaren Grössen bedeuten, die wir bei dieser Auseinandersetzung des Grenzbegriffes zunehmend und zwar schliesslich über alle Schranken hinaus wachsend uns denken wollen, etwa wie die von einem festen Termin an bis zum endlos fortrückenden Jetzt verflossene Zeit. Doch mit dem Unterschiede, dass jenes Wachsthum nicht etwa alle Stufen der Grösse zu durchlaufen braucht, sondern auch sprungweise, wie die springenden Zeiger gewisser Uhren, oder mit irgendwelchen unregelmässigen Werthfolgen vor sich gehen

darf. Wenn es nun eine feste Grösse Y giebt, der $f(x)$ bei wachsendem x ohne Ende sich nähert, in der Weise, dass es immer hinreichend grosse Werthe von x giebt, von denen an der Unterschied $Y-f(x)$ kleiner als eine beliebig klein zu denkende Grösse ist und bleibt, so heisst Y die Grenze von $f(x)$, und man schreibt:

$$Y = \lim f(x).$$

So ist, bei beliebigem Wachsthum von x, 1 die Grenze von $\frac{x-1}{x}$, und, wenn x ganze Zahlen vorstellt, ist 2 die Grenze von $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots\frac{1}{2^n}$. Endlich ist Null die Grenze von $\frac{\cos x}{x}$. Dagegen hat z. B. die Reihe der ganzen Zahlen 1, 2, 3, ... keine Grenze, mithin auch nicht die Folge aller Zahlen x, wenn dies Zeichen jede ganze oder gebrochene Zahl darstellt. Weiter haben periodische Vorgänge, wie die siderischen Wechsel, keine Grenze, vorausgesetzt dass es mit der Planetenbewegung in Zukunft beim Alten bleibt. Der allgemeine Functionsbegriff umfasst auch die sogenannten unendlichen Operationen, z. B. die unendlichen Reihen und Producte, die Kettenbrüche, die Integrale, u. s. f. Bei Reihen, Producten, etc. ist, wie im obigen Beispiel, unter x die Ordnungszahl des letzten Gliedes der noch nicht ins Unendliche fortgesetzt gedachten Operation zu verstehen.

Fast bei jedem Schritt in der Analysis steht man vor der Frage, ob diese oder jene Vorschrift $f(x)$ eine Grenze besitzt oder nicht, wenn x entweder einem bestimmten Werthe sich nähert oder über alle Schranken hinaus wächst. Diese Frage legt uns die Analysis so häufig vor, dass zu ihrer Beantwortung ein ungemein reichhaltiger Schatz von Sätzen, Regeln, Theorien im Laufe der Jahre gesammelt worden ist, die uns

zum Theil so geläufig sind, dass wir sie unbewusst, wie die elementaren Rechnungsregeln, anwenden. Bei den eben erwähnten unendlichen Operationen nennt man Convergenz- und Divergenzcriterien die Regeln, welche über Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer Grenze entscheiden.

Nun scheinen alle solche Sätze, Regeln, Theorien aufgefasst werden zu können als rein mathematische Umformungen und Schlüsse, durch welche erreicht wird, dass auch in den zusammengesetzteren Fällen stets ein gewisses höchst einfaches Kennzeichen zum Vorschein kommt, welches sogleich die Frage nach dem Vorhandensein einer Grenze entscheidet. Dies Kennzeichen besteht in folgender Aufstellung, die gewiss auch ohne Beweis etwas sehr Glaubwürdiges hat.

Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$ gedacht, von einem hinreichend grossen Werth von x an und für beliebige Werthe des Unterschiedes $x_1 - x$ unter einer beliebig klein angenommenen Zahl bleibt, so hat die Function $f(x)$ einen bestimmten Grenzwerth. Wenn aber nach jedem noch so grossen Werth von x sich Unterschiede $f(x_1) - f(x)$, stets $x_1 > x$ gedacht, nachweisen lassen, die grösser als eine beliebig kleine, aber unabhängig vom vorrückenden x gedachte Grösse sind, so hat $f(x)$ keine Grenze.

Ich nenne diese Regel das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip, weil ich in der That finde, dass es bei allen mir bekannten bindenden Grenzbetrachtungen schliesslich gelingt, sie als Sitz der Beweiskraft aufzudecken.

Man darf behaupten, dass dieses Princip im Verein mit der Definition der Grenze, nach welcher darunter eine Grösse Y zu verstehen ist, deren Unterschied von $f(x)$ mit wachsendem x

unter jede Schranke sinkt, psychologisch ein grosses Gebiet der Mathematik vertritt, jedenfalls den Theil, welcher die begrifflichen Schwierigkeiten enthält. In diesem Sinne können wir sagen, dass unsere Untersuchung über die mathematischen Grundbegriffe auf ein vollständiges Verstehen jenes Princips hinausläuft.

Es zerfällt in zwei Theile, von denen der eine eine Grenze behauptet, der andere sie unter einer gewissen Bedingung ausschliesst, ihren Begriff also jedenfalls voraussetzt. Wesentlich um den ersten Theil handelt es sich zunächst, weil von ihm aus rein mathematische Wege zum zweiten Theile führen. Nun, man kann den Satz auf mehrfache Weise beweisen, und zwar mit demselben Grad von Strenge, deren die Beweise anderer bekannter Grundsätze der Analysis sich erfreuen.

Allein wenn man bei solchen Beweisen immer weiter zurückgeht auf die elementaren Gedanken, aus denen sie sich zusammensetzen, und stets von Neuem die Frage sich vorlegt, ob jeder Schluss vollkommen befriedige, so entdeckt man in jedem von ihnen mindestens eine Stelle, die einer Lücke in unserer Vorstellungsfolge entspricht, wo Etwas durchaus unvermittelt auftritt, dessen Vorhandensein zu beweisen niemals auch nur versucht wird. Dieses Etwas ist die Grenze selbst. Sie mag uns noch so nahe gelegt werden, stets trennt uns von ihr eine unergründliche Kluft, die Continuität der Vorstellungen ist irgendwo unterbrochen. Abschwächend nennt man Grenzübergang den Sprung über diese Kluft, doch zeigt der Name, wie sehr man die Lücke fühlt.

In der That wenn man die Grenze eines Vorgangs $f(x)$ nicht wie in unsern obigen einfachen Beispielen (pag. 5) bereits

kennt, wenn aber die Bedingung des allgemeinen Princips erfüllt ist, und es wird behauptet, der Vorgang müsse eine Grenze haben, so behauptet man nichts Geringeres, als dass durch die Vorschrift f(x) eine Grösse erschaffen oder erzeugt wird, von der man vorher Nichts wusste und welche ohne die Operation f(x) auch nicht vorhanden zu sein brauchte. Worin besteht aber eine so erzeugte Grenzgrösse? Wie soll man sie sich denken?

Wenn z. B. die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\ldots$ in der That die Grenze 2, also eine Zahl zur Grenze hat, wie dadurch leicht festzustellen, dass die Bedingung für die Grenze erfüllt ist, dass also der Unterschied $2-\left(1+\frac{1}{2}+..\frac{1}{2^n}\right)$ mit wachsendem n unter jede Grenze sinkt, so hat noch kein Mensch die Zahl oder den Decimalbruch oder irgend ein anderes Ding gesehen, wodurch die Grenze der Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+..$ dargestellt wird. Niemand hat das numerische Ergebniss der ins Endlose fortgesetzt gedachten Wurzelausziehung aus 2 gesehen, welches wir mit $\sqrt{2}$ bezeichnen, um damit ebenso unbefangen alle Rechnungsoperationen vorzunehmen, wie z. B. mit der Zahl 2 selbst. Wenn nun dennoch behauptet wird, dass diese Grenzen vorhanden sind, so ist diese Behauptung entweder falsch, oder sie bedarf einer Ergänzung, die man vergeblich in der mathematischen Fachliteratur, geschweige in den an diese Literatur sich anschliessenden philosophischen Schriften suchen wird.

Die Entstehung der Grenze aus einem durchaus unbeschränkten Vorgang f(x), wie wir ihn bisher voraussetzen, ist

jedoch offenbar, wie f(x) selbst, ein sehr umfassender Inbegriff von Vorstellungen, in welchen wir erst im Capitel über das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip bemüht sein werden, ordnende Gedanken hineinzutragen. Ein besonderer Fall des allgemeinen Princips, dass nämlich eine Function, die nur in demselben Sinne sich ändert*), und nicht über alle Grenzen zu- oder abnimmt, eine bestimmte Grenze haben muss, ein Fall, der als einfachere Vorstellung zur Untersuchung der Entstehung der Grenze schon eher sich eignen würde, enthält endlich als ganz speciellen Fall eine noch viel eingeschränktere Art der Grenzbildung, bis zu welcher, wie in dem angeführten Capitel gleichfalls gezeigt wird, die gerügte Lücke in der Herleitung der allgemeinen Sätze sich zusammenziehen lässt. Ich meine die gewöhnliche Darstellung der sogenannten Irrationalen durch endlose Decimalbrüche. Sie also gilt uns als der kürzeste Ausdruck für Alles, was in der Analysis der unendlichen Operationen schliesslich noch unbewiesen erscheint.

Sobald einmal die Entstehung der Decimalbruchgrenze keine Dunkelheit mehr für uns hat, ist der Bann gebrochen, und die Analysis ist Herrin im Hause. Sie schaltet so frei und sicher innerhalb der Unermesslichkeit der Grössenbeziehungen, wie die Theorie der ganzen Zahlen es in ihrem engeren Bereich von je war.

---

*) Ein abgekürzter Ausdruck, der für folgendes Verhalten angewandt wird: Eine Function nimmt nur zu oder nur ab, wo sie sich ändert. Ausgeschlossen ist eben nicht, dass sie streckenweise oder durchweg constant ist. Eine so beschränkte Veränderungsart soll auch einsinnige Veränderung genannt werden. Lejeune-Dirichlet bezeichnete das Verhalten dadurch, dass er sagte: Die Function nimmt nirgends ab oder nirgends zu (Dove's Repert. Bd. 1, Darstellung willkührlicher Functionen durch Reihen).

Wir sehen also, dass die Ueberlegungen, die das Schlussverfahren des Grenzbegriffs hervorruft, schon durch die gewöhnlichsten arithmetischen Operationen, wie die endlosen Decimalbrüche, angeregt werden konnten. Allein was hätte in der elementaren Mathematik, wo die endlosen Decimalbrüche höchstens zur Ausrechnung benützt werden, hätte den Verdacht erwecken können, dass hier nicht Alles im Reinen sei? Die nachstehende Untersuchung des Grenzproblems wurde vielmehr veranlasst durch gewisse neue und kühne Combinationen, die in der Uebertragung der Verschiedenheiten des Zahlencontinuums im Unbegrenztkleinen auf Functionalabhängigkeiten wurzeln, und bei denen geradezu Unbegreiflichkeiten aufzutauchen schienen. Die mit dem Functionsbegriff auch noch von Fourier, der nur an vereinzelte sprungweise Aenderungen dachte, verbundene Stetigkeitsvorstellung, wurde meines Wissens zuerst von Lejeune-Dirichlet durchbrochen. Nachhaltig wichen diese Vorurtheile über den Gang der Functionen aber erst den überall stetigen doch ableitungslosen, sowie den allerorts unstetigen doch integrirbaren Functionen, welche aus dem Gedankenschatze, den einer der tiefsten leider aber auch wortscheuesten Forscher dieses Jahrhunderts in sein frühes Grab nahm, die einen durch ihres Lehrers würdige Schüler, die anderen durch einen glücklichen Umstand für die Wissenschaft gerettet worden sind.

Kurze Uebersicht über die folgende Untersuchung.

Eine so gründlich angelegte Untersuchung, wie die hier über den Beweis des Grenzbegriffs anzustellende, sollte sich füglich zuerst die Frage vorlegen: Worin besteht ein mathematischer Beweis? Was kennzeichnet ihn als genügend, was als mangelhaft? Lassen wir jedoch diese verwickelte Frage

auf sich beruhen. Ich glaube, dass man sich bei der Beurtheilung eines Beweises heut zu Tage auf das seit einiger Zeit bedeutend empfindlicher gewordene logische Gewissen der Mathematiker von Fach verlassen kann. Die wissenschaftliche Definition des mathematischen Beweises wird vielleicht dereinst auf ähnlichem Wege gelingen, wie er in Boole's, durch Herrn Schröder's Bearbeitung uns zugänglicher gemachten Logikcalcul eingeschlagen worden ist.

Soviel ist jedoch klar, dass ein Beweis oder ein Begreifen eine schon vorhandene Anfangsvorstellung, oder den (Begriff genannten) gemeinschaftlichen Inhalt einer Classe von Vorstellungen mit einer neuen zu beweisenden oder zu begreifenden Endvorstellung durch eine Kette von Vorstellungen verbinden muss, deren folgweise Fortzeugung nirgends befremdet, nirgends den Frieden unseres aufmerkenden Bewusstseins stört. Das Begreifen wird auf dem Wege von der neuen zur Ausgangsvorstellung, der Beweis wird auf dem umgekehrten Wege erfolgen. Auf alle Fälle muss daher bei unserer Untersuchung, die sich auf Werthe bezieht, zunächst die Anfangsvorstellung oder der Ausgangsbegriff in's Reine gebracht werden, welcher kein anderer sein kann, als der Begriff von der Grösse überhaupt, genauer gesprochen, der mathematischen Grösse, namentlich in ihrer Beziehung zur Zahl.

Nach Feststellung des Begriffs von der mathematischen Grösse werden wir unsere Hauptaufgabe, den Grenzbegriff oder schlechtweg die Untersuchung der Decimalbruchgrenze, in Angriff nehmen können. Hier also müssen wir, wie angekündigt, zwei Denkwege verfolgen, zwei sich auf das Schroffste gegenüberstehende Anschauungsweisen, deren keiner jedoch wir den Vorzug ertheilen möchten, darzustellen versuchen. Ich habe,

um sie ganz unabhängig von einander und mit allen ihren unversöhnlichen Gegensätzen vor den Augen des Lesers zu entwickeln, eine besondere Form der Darstellung gewählt:

Der Leser wolle sich in folgendes ersonnene Vorkommniss hineindenken. Nachdem ich gelegentlich mit zwei wissenschaftlichen Freunden über die Grundanschauungen der Analysis mich unterhalten, hätte ich sie um briefliche nähere Ausführung ihrer Gedanken ersucht, die mir auch freundlich wäre zugesagt worden. Weiter hätte ich, auf ertheilte Erlaubniss hin, die Mittheilungen des einen Freundes dem anderen vorgelegt und so einen schriftlichen Meinungsaustausch hervorgerufen, wie ich ihn nach Auseinandersetzung des Grössenbegriffs dem Leser vorzulegen mir erlaube. Ich bin bestrebt gewesen, in meinen beiden Rollen gleich streng zu schliessen, und an meinem guten Willen liegt es daher nicht, wenn es gelingen sollte, dem Idealisten oder Empiristen einen logischen Fehler nachzuweisen. Der Idealist wird zuerst das Wort ergreifen.

Die Idee, nach welcher im Folgenden zwei grundverschiedene Anschauungsweisen über die analytischen Grundbegriffe nicht blos angedeutet, sondern planmässig durchgeführt werden, lässt sich im Allgemeinen etwa so aussprechen, dass wir gegenüber den hypothetischen Grenzen oder Enden unserer nur nach Mehr oder Minder abgestuften Vorstellungsfolgen je Anlage und Erziehung auf verschiedene Weise Stellung zu nehmen pflegen, und dass uns hierin die Freiheit unserer Wahl logisch durch Nichts beeinträchtigt wird. Aber auch in den Grundbegriffen anderer Gebiete menschlichen Erkennens scheint dieser Gedanke ein guter Wegweiser zu sein, wie ich in einer besonderen Schrift demnächst zu zeigen beabsichtige.

So verhält es sich denn mit der Decimalbruchgrenze, an welcher doch bei der Menge Zweifel weder auftauchen noch Gehör finden würden, ähnlich wie mit dem berufenen 11. Axiom des Euklid. Welchen Anstrengungen haben die erlesensten Geister sich unterzogen, um einige jedem Zimmergesellen als selbstverständlich erscheinende Wahrheiten zu beweisen! Ziel und Gewinn war aber nicht allein das reine geometrische Gewissen, sondern ein tieferes Verstehen des menschlichen Denkvorgangs, indem man, um den Ursprung dieser natürlichen geometrischen Anschauungen zu finden, die menschliche Raumvorstellung zergliedern und bis zur Art ihrer Erwerbung zurückgehen musste.

Den Abschluss der folgenden Betrachtungen, welche die »allgemeine Functionentheorie« einleiten sollen, bildet die mathematische Theorie des Grenzbegriffs und des allgemeinen Convergenzprincips. Nach so langer Fahrt auf philosophischer See betreten wir mit diesem Gegenstande zuerst wieder festen mathematischen Boden, den wir fortan — dies sei der Erfolg unserer begrifflichen Untersuchungen — unter unsern Füssen nicht wieder vermissen werden.

Cap. I.

Ueber mathematische Grössen.

Einleitung.

Unter mathematischer Grösse (quantum, quantitas, quantité) *) versteht man gewöhnlich eine gemeinsame Eigenschaft verschiedenartiger Dinge, in Bezug auf welche sie numerisch vergleichbar sind, wie deren Länge oder Gewicht. Doch keineswegs alle Vorstellungsreihen, mit welchen sich mathematisch operiren lässt, fallen unter diese Definition. Allgemeiner ist unter mathematischer Grösse der Inbegriff einer Folge von Vorstellungen zu verstehen, von der mindestens ausgesagt werden kann, 1. dass jede Einzelvorstellung in jener Folge ihren genügend bestimmten Platz besitzt, 2. dass zwischen den Grössen der Folge, oder zwischen ihnen und den Grössen anderer ebenfalls festgeordneter Folgen Beziehungen stattfinden, welche zu neuen Beziehungen combinirt werden können.

Allein es ist, wie sogleich eingeräumt werden soll, mit

*) Leider hat man im Deutschen für magnitudo und quantitas nur das eine Wort Grösse. Ich weiss mir keinen andern Rath um im Folgenden deutlich mich ausdrücken zu können, als magnitudo erforderlichen Falles mit Grossheit wieder zu geben. Die Franzosen verfügen dagegen über beide Ausdrücke quantité und grandeur, für das was in diesem Capitel Grösse genannt wird, von denen der letztere den allgemeinen Begriff bezeichnet, der erstere wohl die Nebenbedeutung numerischer Abschätzbarkeit besitzt.

rgleichen Producten diplomatischer Definitionskunst über-
upt nicht viel geleistet. Wir erhalten durch sie ebenso
enig einen Ueberblick über den Umfang und Inhalt eines
zart und reich verzweigten Begriffs, als wenn uns eine
ue Thierform durch Angabe einer gewissen Anzahl sie ein-
hliessender Ebenen beschrieben würde.

Der richtige Weg ist, den Begriff in den verschiedenen
rkenntnissgebieten, in denen er voraussichtlich auftritt, auf-
suchen und zu verfolgen, und sein Gemeinsames, wo es sich
igt, sogleich festzulegen. So werden wir denn bald genug
f eine Grundform des mathematischen Grössenbegriffs ge-
hrt, deren Herrschaft sich nicht allein über die äussere
ahrnehmungswelt, sondern auch weit in das Seelenleben
nein erstreckt.

Die linearen mathematischen Grössen, wie ich jene Grund-
rm nenne, sind die eigentlichen Wurzeln der Analysis,
rch welche sie aus ihrem natürlichen Boden, der Natur-
rschung stets neue Nahrung zieht. Aber auch das Wesen
ders beschaffener mathematischer Grössen werden wir schär-
r erfassen, wenn wir sie mit den lineären vergleichen, und
üfen, durch welche Eigenschaften sie davon abweichen.

Die mathematische Grösse vermag entweder ihrem Wesen
ch nur in discreten Werthen zum Vorschein zu kommen,
ie die Anzahlen, oder sie entspricht einer Gattung stetig in
nander übergehender Vorstellungen, wie die Längen. Hier-
it ist zwar eine trennende Linie gezogen, an deren beiden
iten wir uns näher umzusehen haben, die jedoch, wie man
sbald erkennen wird, keine eigentliche Begriffsspaltung an-
igt, weil die stetige mathematische Grösse, um die es sich
esentlich handelt, zur messenden Vergleichung erst dienlich

wird durch Aufnahme des Zahlbegriffs, weil also der stetige Grössenbegriff in seiner wissenschaftlichen Ausbildung den discreten voraussetzt.

1. Discrete mathematische Grössen.

Nun, um zunächst den discreten mathematischen Grössen näher zu treten, so entsteht der Begriff der Anzahl, auf welche discrete Grössenart wir unsere Betrachtung hier beschränken wollen, aus der Vorstellung vom Getrenntsein der Wahrnehmungsgegenstände und die Verständigung über diesen Begriff findet statt mit Hülfe der Worte oder Zeichen, durch welche die Anzahlen dargestellt werden, und die man Zahlen nennt.

Von der Beschaffenheit des Gezählten ist der Begriff der Anzahl ganz unabhängig. Rafaël, ein Lehrsatz, eine Kanone sind unstreitig zusammen drei Gegenstände. Die Anzahl ist also gleichsam der Rest, der in unserer Seele zurückbleibt, wenn alles, was die Dinge unterschied, sich verflüchtigt, und nur die Vorstellung sich erhält, dass die Dinge getrennt waren. Sie misst das Gefühl, wie oft wir haben aufmerken müssen. Hieraus folgt sogleich, dass die getrennten Gegenstände, wenn sie durch Nichts oder doch möglich Wenig sich unterscheiden, unmittelbar die Vorstellung der Anzahl erwecken, weil der Eindruck des Verschiedenartigen nicht erst zurückzutreten braucht, sondern gar nicht entsteht. Hierbei ist freilich angenommen, dass die Aufmerksamkeit nicht durch die geometrische Anordnung der Gegenstände in Anspruch genommen wird, geschweige von vornherein auf sie gerichtet ist.

2. Erläuterung zur Begriffsbildung.

Die vorstehend angedeutete Entstehungsweise des Anzahlbegriffs ist ungefähr die allen Begriffen gemeinsame. Doch scheint es am Eingang einer Reihe von Begriffsfestsetzungen angemessen, zu sagen, wie ich die Begriffsbildung mir vorstelle.

Begriffe entstehen, wo Gemeinsames einer Gruppe von Vorstellungen unsere Aufmerksamkeit erregt und fesselt. Das Verschiedenartige dieser Vorstellungen erblasst, oder wie Johannes Müller es beschreibt, verdunkelt sich vor unserem Bewusstsein. Wenn sodann in unserer Seele der Begriff, nämlich jenes Gemeinsame, zurückbleibt, so haftet es nach meinen Beobachtungen in Vorstellung und Erinnerung wesentlich am Wort oder Zeichen, mit welchem Sprache oder Wissenschaft den Begriff bezeichnet. Will man den Begriff seinem wirklichen Inhalte nach sich vergegenwärtigen, so erscheinen dann vor unserer Seele wieder eine oder mehrere der besonderen Vorstellungen, von welchen das Gemeinsame abgezogen wurde. Auch beobachtet man an sich, dass Begriffe, für welche noch keine Worte oder Zeichen vorhanden sind, mit einer besonders hervorragenden unter der Gruppe von Vorstellungen, der sie angehören, gleichsam als ihrem Zeichen, verknüpft sind. Ja dies ist wohl überhaupt der Anfang der Begriffsbildung und deren wahrscheinlichste Form bei ohne Sprache Denkenden.

Das Gemeinsame einer Begriffsreihe vereinigt sich sodann wieder zu einem allgemeineren und daher ärmeren Begriff u. s. w.

3. Discrete mathematische Grössen. Fortsetzung.

Der durch Ziffern oder Worte bezeichnete Anzahlbegriff gehört seiner Natur nach zu denen, welche sich am meisten

losgelöst haben von den erzeugenden wirklichen Vorstellungen.

Dies rührt daher, weil man nur von ganz kleinen Anzahlen eine wirkliche Vorstellung sich machen kann. Es giebt wenig Menschen die auf den ersten Blick eine grössere Anzahl von geeigneten Objecten (z. B. der Form und Farbe nach gleichen Kugeln) als fünf bis sieben erkennen können, wobei ich annehme, dass die geometrische Anordnung der Gegenstände möglichst gleichförmig für die verschiedenen Anzahlen getroffen ist, dass sie also etwa auf einer geraden Linie aufgereiht sind. Bei der gleichförmigen Anordnung auf einer Geraden, vollends aber bei der Anordnung auf einem Kreis, wo ihm zudem ein deutlich unterschiedener Anfangspunkt fehlte, vermochte Dahse, wie mir berichtet wurde, nur eine erheblich kleinere Anzahl mit einem Blick zu zählen, als wenn die Gegenstände in einer Fläche vertheilt waren, wo sie doch immer geometrische Figuren bilden.

Nun also angenommen, dass wir von Anzahlen etwa bis zur Anzahl sieben eine deutliche Vorstellung haben, so können wir bis zu ihr den Anzahlbegriff mit einer besonderen Vorstellung zur Deckung bringen, wie den Begriff Eiche mit der Vorstellung einer besonderen Eiche. Darüber hinaus haben wir wirkliche Vorstellungen zwar von grösseren oder kleineren Mengen, grössere Zahlenvorstellungen knüpfen sich jedoch an die Vorstellung abgezählter Mengen. Einunddreissig ist z. B. keine unmittelbar aus der Wahrnehmung geschöpfte Vorstellung, sondern sie setzt den Vorgang des Zählens voraus.

Das Abzählen selbst erfordert aber, wenn die Zahl zwanzig, die Anzahl der Finger und Zehen, erheblich übersteigt, ein Zahlsystem, mithin eine gewisse Stufe wissenschaftlicher Entwickelung.

Der Zahlenbegriff zeigt somit deutlich zuerst zwei

Stufen der Ausbildung, von denen die zweite wissenschaftliche Anfänge enthält, und sodann noch eine dritte durchaus wissenschaftliche.

In die erste Entwickelungsstufe fallen die rohesten Anfänge des Messens von Anzahlen durch Zahlen, sich anschliessend an die unmittelbar aus der Wahrnehmung geschöpften Vorstellungen von kleineren Zahlen und von Mengen, wie sie auch den Thieren, die gegen mehrere Feinde anders sich zur Wehr setzen als gegen einen, eigen sein möchten. Jene ursprüngliche Zahlenmessung bestand, nach übereinstimmenden Berichten über die Nichtculturvölker der Jetztzeit, wohl auch in den jeglicher Cultur voraufgehenden Epochen nur in der Vergleichung mit den Anzahlen der Finger und Zehen, wovon als gehässiges Erbtheil unser decadisches Zahlensystem Zeugniss ablegt.

Die weitere Entwicklung des Zahlenbegriffs hat die unbegrenzte Folge der ganzen Zahlen ergeben, welche dadurch bestimmt ist, dass jede folgende Zahl eine Anzahl mit einem Object mehr wie die vorhergehende vorstellt, und hat innerhalb dieser Folge Anhaltspuncte festgesetzt, welche jede Anzahl zu zählen gestatten.

Endlich die wissenschaftliche Ausbildung des Zahlenbegriffs sucht die Beziehungen zwischen den ganzen Zahlen auf und hat von den einfachsten Rechnungsregeln aus schliesslich zur Zahlentheorie geführt. Indess war der Weg doch schwerlich ein so directer, sondern die Anfänge der wissenschaftlichen Ausbildung des Zahlenbegriffs fallen wohl mit denen des stetigen Grössenbegriffs zusammen und beide haben sich erst durch die Anforderungen, die der eine an den andern stellte, entwickelt und ausgebildet, bis tieferer Sinn sich an den schönen Eigenschaften der Zahlen um ihrer selbst willen

sich zu erfreuen begann, und dann im Laufe von Jahrtausenden die mannigfachen Keime einer Lehre legte, welche in den beiden letzten Jahrhunderten zu so reicher Entfaltung gedieh.

4. Ueber die stetigen mathematischen Grössen.

Beispiele von stetigen mathematischen Grössen sind: Länge, Flächen- und Rauminhalt, Gewicht, die Zeit, die Geschwindigkeit, die Kraft, Wärmemenge, Intensität des Lichtes und Schalles, electrische Spannung, Stromstärke u. s. w.

Wenn von mathematischen Grössen die Rede ist, so denkt man zuerst wohl nur an die geometrischen Grössen, namentlich aber an die begrenzte Gerade oder Länge, auf die man die anderen Grössen zurückzuführen sucht, weil sie unstreitig die einfachste, unveränderlichste, verbreitetste derartige Vorstellung ist. Nicht Vorstellung sondern, im oben bei Gelegenheit der Anzahl angegebenen Sinne, Begriff müsste es eigentlich heissen, der aber hier, im Gegensatz zur Anzahl, wohl bei den Meisten einer der besonderen Vorstellungen, aus denen er abgezogen, so nahe steht, dass sie beim Denken ihn ersetzt. So schwebt dem Einen dabei eine Kante oder die Begrenzung einer Ebene vor, ein Anderer denkt sich die Länge als einen Faden, Strich oder Strahl. Endlich denkt man auch wohl an eine von einem bewegten Punkt sternschnuppenartig durchlaufene Bahn *).

Die angeführten stetigen mathematischen Grössen haben

---

*) Wenn ich in der Folge nicht selten Länge mit Strecke oder begrenzter Geraden in ungefähr demselben Sinne gebrauche, so wird ein Missverständniss daraus nicht entstehen können, dass Länge allerdings auch der eigentliche Ausdruck für die Abziehung: »durch die Oberfläche ausgedehnter Gegenstände begrenzte Gerade« ist, falls man von der Länge eines Menschen, eines Eies u. s. f. redet.

zunächst das gemein, dass ihre Messung und Vergleichung auf Wahrnehmungen des Gesichtssinnes beruht, weiter dass ihr vergleich- und messbares Gemeinsame schliesslich stets die geradlinige Strecke wird und dass sie sich wie diese theilen und zusammensetzen lassen. Betrachten wir, um dies etwas auszuführen, die geometrischen Maassvorstellungen.

5. Das Gemeinsame der vorher angeführten Grössen mit den geometrischen Grössen.

In der Mosaik des Gesichtsfeldes treten Bilder auf, von denen jedes irgendwie ausgeschnittene Stück dieselben Eigenschaften besitzt, wie das ganze Bild. Die unmittelbarste Anschauung solchen Verhaltens bietet uns das Bild der begrenzten geraden Linie. Ein Irrthum wäre es aber, vom Kreisbogen dasselbe behaupten zu wollen, weil u. A. das Verhältniss der Sehne zum Bogen nicht unverändert bleibt, wenn der Bogen kleiner und kleiner wird, weil vielmehr bei fortgesetzter Zerstückelung des Kreisbogens seine Vorstellung allmählig aufhört, diejenige eines Bogens zu sein und in die der Geraden übergeht. Dagegen gilt Aehnliches, wie von der Geraden, von der gleichförmig gefärbten und beleuchteten Fläche, welches auch deren Gestalt sei, nur nicht mehr auf Grund der unmittelbaren Anschauung. Die Analogie zwischen den Maasseigenschaften der Geraden und der Maassvorstellung solcher Flächen wird vermittelt durch den neuhinzutretenden Begriff des Flächeninhalts, d. i. der Exhaustion einer irgendwie begrenzten Fläche und Uebertragung ihrer Flächentheile in den Ramen z. B. eines Rechteckes von fester Breite und veränderlicher, den Flächeninhalt der Fläche angebender Länge. Durch diese »Ausschöpfung« wird die Vergleichung und Messung gleichförmiger Flächen durchaus auf die von Längen

zurückgeführt. Denken wir uns weiter unsere Gesichtsvorstellung durch die Raumvorstellung vervollständigt, so kommt der Begriff des Rauminhalts hinzu, dessen Maass wir ähnlich, wie so eben das des Flächeninhalts, als Länge darstellen, und der somit, ganz wie die Länge, die Eigenschaft der Gleichartigkeit der Theile mit dem Ganzen, zu dem die Theile gehören, oder mit jedem anderen Ganzen derselben Gattung besitzt.

Auch in den übrigen namhaft gemachten mathematischen Grössen entdeckt man leicht die messende Länge. Um einige naheliegende Beispiele anzuführen, so setzt der Kreisbogen, welchen der Zeiger der Uhr beschreibt, rectificirt, die Zeit in eine Länge um, die Skala der Hebelwaage misst das Gewicht, die Kraft wird der Energie von Druck- oder Bewegungserscheinungen, welche ihrerseits wieder sofort in Längen ausgedrückt werden können, proportional gesetzt u. s. f.

Nun, wo unsere Wahrnehmungen und Beobachtungen eine Art von Vorstellungen uns zuführen, die sich nur durch das Mehr oder Minder unterscheiden, fühlen wir uns vorläufig befriedigt, wenn wir die verschiedenen Stufen dieser Vorstellung mit geometrischen Maassvorstellungen in feste Beziehungen gesetzt haben, wenn also eine messende Länge darin aufgefunden worden ist. Denn dies erscheint uns als der erste Schritt zum mechanischen Verständniss. Wir folgen eben stets dem Trieb, das Neue, weil es unseren Seelenfrieden stört, in Alltägliches und Geläufiges aufzulösen, und dahin sind vor Allem die geometrischen Maassvorstellungen zu rechnen.

Denn Vergleichen und Theilen von Strecken ist uns etwas so Natürliches, dass es, wie die erste Stufe des Anzahlbegriffs, vielleicht nicht einmal ausschliesslich menschlich ist. Aber

auch die Begriffe von Flächen- und Rauminhalt gehören wahrscheinlich zu den frühesten Erwerbungen des menschlichen Geistes. Das werdende Geschlecht konnte sie aus zahllosen Beobachtungen abziehen. Der Bedarf an Stoff für Gewänder und Zeltdecken, der Flüssigkeitsinhalt verschiedener Gefässe u. dergl., die für Felder verschiedener Form und Grösse erforderliche Saat, sodann, bei fortschreitender Vergesellschaftung des Menschen, die Begriffe des Grundeigenthums und der conventionellen Maasse und vieles Aehnliche haben aus Flächen- und Rauminhalt eine der Grundanschauungsformen unseres Geistes gemacht. Das Kind erwirbt diese Begriffe, falls sie nicht angeboren sind, z. B. durch Zerreissen von Papier und Spiel mit Gefässen, die es mit Sand oder Flüssigkeit füllt.

Die geometrischen Maassvorstellungen bilden daher den Ursprung und die stete Zuflucht unseres genauen Denkens, eine Behauptung, die schwerlich ernstem Widerspruch begegnen wird.

6. Einführung des lineären Grössenbegriffs.

Die bis jetzt besprochenen Grössen haben also eine ausgezeichnete Eigenschaft gemein. Sie sind auf Längen zurückführbar, ihre Unterschiede, Theile und Vielfache sind wie bei den Längen wieder Grössen derselben Art, sie sind wie Längen in der Richtung des Kleinsten und Grössten ausgedehnt, sie sind wie Längen vergleichbar, messbar. Dergleichen mathematische Grössen will ich:

lineäre mathematische Grössen

nennen. Indessen soll der Umfang dieses Begriffs sogleich etwas genauer festgestellt werden und auch eine Erweiterung erhalten.

Eine Grösse sei derart zu einer wie eben beschriebenen lineären Grösse, also z. B. zu einer unbestimmten Länge, in

Beziehung gesetzt, dass sie eine stetige Function der lineären Grösse bildet, gleichviel ob diese Beziehung beobachtet werden kann, oder nur erschlossen wird, oder endlich eine von uns zu irgend einem Zwecke ersonnene Vorschrift ist. Wenn diese Grösse, wo sie wächst oder abnimmt, um Grössen derselben Art sich ändert, woraus, da sie stetig gedacht ist, folgt, dass sie mit Null anfängt, so ist sie gleichfalls als lineäre Grösse anzusehen, sollte sie auch nur begrenzt grosser Werthe fähig sein. Sie wird in der That alsdann wenigstens der begrenzten Geraden Punct für Punct sich zuordnen lassen, und, gleich ihr, mit Ausnahme der Ausdehnung, die Eigenschaften der lineären Grössen besitzen.

An den ersten Theil dieser Begriffsfestsetzung ist bei den als lineäre Grössen eingeführten Kräften zu denken, worauf demnächst zurückgekommen wird. Sodann ist nach ihr z. B. die Wahrscheinlichkeit, in gegebener Entfernung vom Ziel des Schützen getroffen zu werden im erweiterten Sinne eine lineäre Grösse. Die letztere Grössenart entspricht in Bezug auf die mögliche Ausdehnung ihrer Werthe der begrenzten Geraden.

7. Was der Ausdehnung oder dem Grade nach abgestuft ist, gehört zu den lineären Grössen.

Keineswegs alle Grössenarten, die wir als mathematische ansehen dürfen, sind lineäre, so dass unsere Aufgabe zunächst ist, von der Verbreitung der lineären Grössen in den verschiedenen Gebieten menschlicher Erkenntniss wenigstens eine annähernde Vorstellung zu gewinnen. Diese Aufgabe wird uns durch folgende Bemerkung erleichtert:

Bekanntlich pflegt man die Grössenarten einzutheilen in der Ausdehnung und dem Grade nach (extensiv und intensiv)

abgestufte. Dadurch wird ihre Mannigfaltigkeit zwar nicht erschöpft, wichtig aber ist, dass alle nach Ausdehnung oder Grad sich unterscheidenden Grössenfolgen als zu den lineären gehörend angesehen werden können.

Ich sage zu den lineären gehörend. Dann um zunächst die nur nach der Ausdehnung variirenden Grössen zu beleuchten, so kann man z. B. eine stetige Folge ähnlicher Dreiecke nicht als lineär ansehen, da u. A. ihre Unterschiede etwas Unbestimmtes, also nicht wieder ähnliche Dreiecke sind. Aber, was die Dreiecke unterscheidet und bestimmt, Umfang, Höhe, Flächeninhalt oder dergl. ist lineärer Natur. So dürfen wir überhaupt sagen, dass alles nur nach der Ausdehnung Abgestufte auf lineäres Maass zurückführbar ist.

Dagegen sind dem Grade nach abgestufte stetige Grössenfolgen, falls sie als mathematische Grössen aufgefasst werden können, stets lineär.

Die Bedingung, dass die Grössenfolge eine mathematische sei, verlangt nur, dass ihre Individuen an sich hinlänglich bestimmte, nicht dass sie zur Zeit etwa durch Zuordnung zu lineärem Maass für uns bestimmbar seien, oder dass wir auch nur eine Ahnung davon hätten, wie solche Zurückführung je werde bewirkt werden können. Dies vorausgeschickt, müssen wir uns zuerst klar zu machen suchen, was unter »Gradverschiedenheit« zu verstehen ist. Dieser Begriff ist zwar nicht so leicht aufzulösen, als der von der räumlichen Verschiedenheit, allein wir dürfen natürlich gerade hier uns nicht darauf berufen, dass er uns nicht minder geläufig ist. Folgende Erklärung des Begriffs liess mich bisher nicht im Stiche:

Wir wenden den Ausdruck: »verschieden dem Grade nach« an, wo wir die Aenderungen (Zuwächse und Abnahmen) einer Grösse für Grössen

derselben Art halten, wo also die Unterschiede innerhalb einer Grössenart wieder als Grössen derselben Art uns erscheinen.

Dies ist nun eine der Haupteigenschaften der lineären geometrischen Grössen, die man allerdings nicht nach dem Grade zu unterscheiden pflegt, weshalb wir auch richtiger sagen, dass wir diese Eigenschaft Gradverschiedenheit nennen, wo nicht bei besonderen Grössenarten besondere Benennungen dafür vorhanden sind, wie eben bei den geometrischen Grössen die Unterscheidung nach der Grossheit oder Kleinheit (siehe die Anm. pag. 14) stattfindet.

Das angegebene Verhalten bedingt unstreitig die lineäre Beschaffenheit der gradverschiedenen mathematischen Grössen, wenn nämlich noch deren Stetigkeit vorausgesetzt wird, obschon die blosse Gradverschiedenheit discrete Grössenfolgen im Princip nicht ausschliesst.

In der That, wenn die Veränderung einer Veränderlichen durch Unterschiede so zu sagen aus demselben Stoff wie die Veränderliche stattfindet, so muss sie, wie schon bemerkt, wenn stetig, mit Null anfangen, weiter muss sie, da sie ganz aus beliebig kleinen Zuwächsen von gleicher Beschaffenheit sich aufbaut, auch Vielfache und Theile derselben Art zulassen, und dies ist eben unser Begriff von der lineären Grösse.

Um Vorstehendes an einigen Beispielen zu erläutern, so sagt man von der Temperatur, dass sie sich dem Grade nach abstuft. Doch ist hier auseinanderzuhalten die physiologisch empfundene Temperatur, d. i. das Wärmegefühl, welches zu den weiter unten zu besprechenden Empfindungen gehört, und die physikalische Temperatur, die der Ausdruck für die Intensität der Wärmebewegung, mithin die eigentliche lineäre Grösse ist.

Die Wahrscheinlichkeit, wenn man sie stetig sich ändernd voraussetzt, gehört ebenfalls hieher. Ich meine die schon erwähnte Wahrscheinlichkeit in gegebener Entfernung vom Ziel des Schützen getroffen zu werden. Ihre Zunahme von einer Stelle zur anderen ist ein Verhältniss von Treffern zu einer grossen Zahl abgegebener Schüsse, kann also wieder als eine Wahrscheinlichkeit angesehen werden.

Endlich sei noch die Härte erwähnt, die in einem noch nicht physikalisch genau zergliederten Widerstand fester Körper gegen ausserhalb ihrer Elasticitätsgrenzen vor sich gehende Formveränderungen (Ritzen, Zerdrücken, Zertrümmern) besteht. Wenn hier von Gradunterschied die Rede ist, so hat man offenbar die Vorstellung, dass die Widerstandskräfte, deren Aeusserung die Härte ist, bei ihrer Variation von einem Stoff zum anderen oder (z. B. durch Temperaturänderungen) in demselben Stoff, Zuwächse erleiden, die Kräfte derselben Art sind, und denen für sich gewisse Härtegrade entsprechen würden. Kurzum die Härte verhält sich zu den Cohäsionskräften, wie die Temperatur zur Wärmebewegung.

Ich wählte gerade diese Beispiele, weil bei ihnen die Richtigkeit unserer Begriffserklärung vielleicht nicht so ohne Weiteres einleuchtet, wie sonst in den weitaus meisten Fällen.

Indem wir somit die lineäre Natur der nach Ausdehnung oder Grad sich abstufenden Grössenfolgen als genügend begründet erachten, versuchen wir, wie angekündigt, eine Uebersicht über die den verschiedenen Gebieten des Denkens eigenthümlichen mathematischen Grössen uns zu verschaffen.

8. Die Grössen der äusseren Wahrnehmungswelt.

Zuerst die Wahrnehmungswelt, die wir die äussere nennen. Voran stehen die geheimnissvollen Endursachen, die

man Kräfte nennt, und mit deren Aufstellung wir die Grenzen des Wahrnehmungsgebiets überschreiten, mithin durchaus im Reiche der Schöpfungen des menschlichen Denkens uns befinden. Aus innerem Drange schliessen wir auf das Vorhandensein der »Endkräfte« aus den Erscheinungen, und müssen diese, da wir über die Endkräfte ja nichts wissen, als ihre vollen Wirkungen ansehen. Die Wirkungen sind also in unserer Vorstellung mit der Kraft der Grösse nach gleichwerthig. Als Drucke, Spannungen und Bewegungen sind die Wirkungen aber lineäre Grössen, so dass die Kräfte es gleichfalls sind, weshalb sie auch als solche oben angeführt wurden.

Es scheint überhaupt, dass, wie weit wir davon entfernt sein und in alle Zukunft bleiben mögen, alle Erscheinungen der äusseren Wahrnehmungswelt mathematisch darstellen zu können, kein Beispiel einer Grössenart sich darbieten will, die nicht vermuthlich einmal in den Begriff der lineären mathematischen Grösse wird aufgenommen werden können, oder besser, die wahrscheinlich nie als eine lineäre sich erweisen werde. Denn überall, wohin wir vordringen, zeigt sich alles Veränderliche der Ausdehnung oder dem Grade nach abgestuft, und solche Grössen, falls sie genauer Bestimmung fähig sind, betrachten wir, wie dies soeben näher erörtert wurde, als wesentlich lineär, auch wenn wir sie noch nicht, ähnlich wie ich dies von der Härte bemerkte, in ihre lineären geometrischen und mechanischen Endvariabeln aufgelöst haben.

9. Die Grössen der inneren Wahrnehmungswelt. Nach dem Grade abgestufte Empfindungen.

Untersuchen wir sodann in Bezug auf ihre Eigenschaften als Grössen einige Vorgänge innerhalb unserer Seele. Die Empfindungen, durch welche sogenannte Reize uns bewusst werden,

sind wohl die einfachsten hierher gehörigen Erscheinungen, und bieten eine höchst lehrreiche Fülle von Grössenarten dar.

Voran stehen die dem Grade nach abgestuften Empfindungen, wie der Schmerz, die Hautempfindungen, die Intensitätsempfindungen der Sinne.

Indem wir unseren Satz von den dem Grade nach unterschiedenen Grössen auf die Empfindungen anwenden, folgt dass auch sie lineäre Grössen sind, falls sie nämlich überhaupt als mathematische Grössen angesehen werden dürfen. Man hat in der That die Vorstellung, dass wenn Reize einer Art sich häufen, ebenfalls eine Häufung von Empfindungen, die den einzelnen Reizstärken zugehören, zu nur einer intensiveren Empfindung stattfindet. So denkt man sich das gesteigerte Wärmegefühl, welches einer Temperaturerhöhung entspricht, entstanden durch einen Zuwachs der Empfindung, der selbst eine Wärmeempfindung ist, wodurch das Wärmegefühl gleichsam ein inneres Abbild der Temperatur wird.

Es frägt sich also unr noch, ob der Empfindungsgrad eine mathematische Grösse sei, ob er hinreichend feste Einzelwerthe zulasse, um als bestimmte Function messbarer lineärer Grössen gelten zu können. Das Schwanken der Emfindungsstärke, welche demselben Reiz unter verschiedenen Umständen entspricht, die Kürze der Zeit, während welcher der Grad der von einem constanten Reiz erzeugten Empfindungsstärke sich gleichbleibt, der Einfluss der Ermüdung also, vor allen Dingen jedoch der Mangel an geschulter Selbstbeobachtung, verleihen namentlich den Geruchs- und Geschmacksempfindungen einen Schein von unbestimmbar Flüchtigem, der verleiten kann, jene Frage ohne Weiteres zu verneinen.

Die Forschung lässt sich indessen durch solch schwankendes Erscheinen nicht beirren, sie sucht vielmehr das

Flüchtige festzuhalten. Vorhanden ist im Centrum ohne Zweifel ein dem Reiz genau entsprechender Zustand, den unser Bewusstsein abzuschätzen und von Nebeneinflüssen zu unterscheiden sich üben muss und gewiss allmählig lernen kann. Uebrigens haben die länger beobachteten und leichter zu vergleichenden Intensitätsempfindungen des Gesichts- und Gehörsinnes im Allgemeinen auch mehr Sicherheit und Festigkeit als die des Geschmacks- und Geruchssinnes. Es erscheint daher keineswegs unwahrscheinlich, dass man bei allen oder doch einigen dem Grade nach abgestuften Empfindungsarten die Bedingungen werde finden können, unter denen es gelingt, uns völlig gleich erscheinende, gleichen Reizgrössen entsprechende besondere Empfindungsgrade zu jeder Zeit hervorzurufen. Dies würde genügen, um in den Empfindungen mathematische Functionen der Reizgrössen zu erkennen, namentlich wenn man an die zuweilen erstaunliche Feinheit unserer Sinne bei der Unterscheidung von Reizgraden durch Empfindungsgrade denkt, eine Sinnesschärfe, welche, wie zahllose Beispiele lehren, wo sie nicht Anlage ist, bis zu hohem Grade durch Uebung erworben werden kann.

Wenn wir hiernach berechtigt sein möchten, die nach dem Grade abgestuften Empfindungen in der Idee als lineäre Grössen anzusehen, d. i. als solche Functionen der Reizgrösse, die mit Null beginnen, und deren Unterschiede, Theile und Vielfache wieder, wenn auch nicht darstellbare, Empfindungsstärken sind, so würde ihre lineäre Beschaffenheit freilich uns ganz anders einleuchten, wenn es irgend ein Princip gäbe, das uns in den Stand setzte, zwei Empfindungen nicht blos nach stärker oder schwächer zu vergleichen, sondern ihr Verhältniss numerisch zu schätzen.

Wir besitzen für die dem Grade nach sich abstufenden Empfindungen eben keinen verschiebbaren Maassstab, der selbst eine solche Empfindung wäre, und den wir gleichzeitig mit einer zu messenden Empfindung wahrnehmen und gleichsam an sie anlegen könnten. Wir können den Grad der Empfindungen nur in der Erinnerung vergleichen. Dies ist in Bezug auf Maassverhältnisse der wesentliche Unterschied zwischen Sehen und z. B. Schmecken. Dann stellen wir uns vor, unsere Gesichtswahrnehmung sei ähnlichen Schranken wie unser Schmecken unterworfen, wir könnten nicht gleichzeitig zwei Längen sehen, sondern nur eine auf einmal in gleichförmigem Gesichtsfelde: sicherlich würden wir von einer doppelten Länge ebenso wenig eine Vorstellung uns bilden können, wie wir thatsächlich unvermögend sind, doppelte Süsse uns vorzustellen. Wir dürfen jedoch aus diesem Unvermögen nicht schliessen, dass der unserer Süsseempfindung entsprechende Gehirnvorgang den Begriff der Verdoppelung seiner Energie nicht zulasse.

Führen wir die Gegenüberstellung der beiden Empfindungsarten noch etwas weiter durch. Von der Längenwahrnehmung kann auf der Nervenbahn von der Retina zum Gehirn nichts verloren gehen. Träte weiter zu der, wie eben geschildert, beschränkten Gesichtswahrnehmung das gleichzeitige Sehen mehrerer Strecken und deren gegenseitige Verschiebbarkeit im Gesichtsfelde hinzu, so entstände daraus, wie angedeutet, die Anschauung von der Verdoppelung der Längen, allgemeiner von deren numerischem Verhältniss. Endlich das Gefühl, dass diese Anschauung der Wirklichkeit entspricht, wird endlich erst durch den Raumbegriff, d. i. durch das weitere Hinzutreten von Ortsveränderungen nach der dritten Dimension erzeugt.

Bei den »gradverschiedenen« Empfindungen wird der

Verlauf, wie folgt, zu denken sein. Auf der Nervenbahn von der Mundschleimhaut z. B. zum Hirn geht wahrscheinlich ein Bruchtheil der Energie des Reizes verloren. Was davon im Gehirn anlangt, löst dort einen Vorgang aus, dessen Energie wieder zum Theil irgendwie anderweitig verwendet wird, zum anderen Theil aber ganz und voll als Empfindung bewusst wird, und in dem Maasse, als unser fühlendes Ich sein Augenmerk darauf richten will oder kann, in unseren Denkprocess eingreift.

Dieser Theil der Energie ist die lineäre Grösse und wird *caeteris paribus* bei gleicher Reizgrösse stets hinreichend genau denselben Werth wieder annehmen, um eben als mathematische Grösse gelten zu können. Ob wir sie je werden messen können? Die Aufgabe, welche das Leben uns unaufhörlich stellt, ist im Gegentheil, den Reiz durch die Empfindung zu beurtheilen und abzuschätzen, wobei wir, wie vermöge der Raumanschauung unsere Dimensionswahrnehmungen, so auf Grund verschiedenartigster Erfahrungen auch unsere Abschätzungen von Reizgrössen mit dem, was uns Wirklichkeit dünkt, in Uebereinstimmung erachten.

Jedenfalls war es ein kühner Gedanke Theodor Fechner's, als er sich jenes umgekehrte Problem stellte, die Abhängigkeit des Empfindungsgrades von der Reizintensität auszudrücken. So wenig gesichert nun sein Ergebniss bis jetzt auch erscheinen mag*), unstreitig gebührt ihm der Ruhm

*) Das Schlussverfahren, welches auf sein psychophysisches Gesetz führt, ist kurz gefasst etwa dieses: Wächst ein Reiz von einem Werthe β an, so nehmen wir bei aller Aufmerksamkeit seine Veränderung nicht sogleich wahr, sondern erst von einer gewissen Stärke $\beta + \triangle\beta$ an, wo erfahrungsgemäss $\triangle\beta$ von der schon vorhandenen Reizstärke β abhängt. Bei auf der Haut aufliegenden Gewichten als Reizen fand E. H. Weber, dass $\triangle\beta$ dem β proportional ist. Doch

des ersten wissenschaftlichen Versuchs unsere Empfindungen zu messen.

---

lässt man dies Gesetz erst von einem für $\beta = 0$ ebenfalls erfahrungsgemäss vorhandenen Werthe $\beta = \triangle\beta_0$ beginnen, wo $\triangle\beta_0$ die Schwelle der Empfindung heisst. Die Hauptsache vom Standpunkte der Grössentheorie ist, dass überhaupt ein solches Gesetz angenommen werden darf, so dass wir hier nicht auf den Gültigkeitsbereich des Weber'schen Gesetzes einzugehen haben. Nun setzt Hr. Fechner voraus, und dies ist der Grundstein seiner Lehre, dass der Zuwachs $\triangle\gamma$ der Empfindungsstärke γ, welcher eben wahrgenommen wird, unabhängig von γ ist, so dass γ aus solchen gleichen Empfindungszuwächsen sich zusammensetzt. Da aber $\frac{\triangle\beta}{\beta}$ constant ist, so darf er weiter schliessen, dass $\triangle\gamma$ proportional zu $\frac{\triangle\beta}{\beta}$ ist. Es wird sodann auch durchaus zulässig erscheinen, wenn er $\triangle\gamma$ und $\triangle\beta$ wie Differentiale behandelt, wodurch er schliesslich γ als proportional dem log. $\frac{\beta}{\triangle\beta_0}$ erhält, welches sein psychophysisches Gesetz ist. Hypothetisch ist die Grösse $\triangle\gamma$, weshalb nicht behauptet werden kann, weil uns eben alles Maass für die Empfindung fehlt, dass diejenigen, welche die Proportionalität zwischen Reiz- und Empfindungsstärke für wahrscheinlicher halten, widerlegt sind. Am meisten scheint mir die Bernstein'sche Theorie für das Fechner'sche Gesetz zu sprechen, wenn auch nur indirect. Aller Wahrscheinlichkeit nach entspricht nämlich im Centralorgan den für Reize empfänglichen peripherischen Nervenendigungen ein enggeschlossenes System von Vorrichtungen, das gleichsam als Abbildung der mit unserem Körper in unmittelbare Beziehung tretenden Aussenwelt anzusehen ist, unter Aussenwelt hier alles verstanden, was ausserhalb des Sensoriums existirt. Hr. J. Bernstein hat versucht, uns eine Vorstellung von einer derartigen centralen Vorrichtung zu verschaffen, welche zugleich die Reizstärke messen und die Erscheinungen des Ortsgefühles für die Angriffsstelle des Reizes erklären würde (Untersuchungen über den Erregungsvorgang im Nerven- und Muskelsysteme, pag. 163, sqq.). Indem er alsdann gewisse Erfahrungen über die Localisation der Hautempfindungen durch einen Gehirnmechanismus zu erklären unternahm, ergaben seine scharfsinnigen Constructionen die Fechner'sche Beziehung zwischen Reiz und Empfindung. Die experimentelle Bestätigung der Folgerungen, welche Hr. J. Bernstein aus seiner Theorie gezogen, kann daher in der That als eine Bestätigung des Fechner'schen Gesetzes betrachtet werden. Obschon es

10. Nicht dem Grade nach abgestufte Empfindungsfolgen, welche zwar mathematische Grössen sind, aber keine lineäre.

Ausser den dem Grade nach abgestuften Empfindungsarten kennen wir deren, wo eine Empfindungsklasse aus Individuen besteht, die zwar in gewisser Beziehung einander ähnliche Eindrücke hinterlassen, deren Verschiedenheit aber nicht wie bei den bisher untersuchten Empfindungen die unwillkürliche Vorstellung erweckt, dass jede Einzelempfindung eine Häufung gleichartiger elementarer Zuwächse ist.

Empfindungsfolgen, die nicht zu den nach der Stärke abgestuften gehören, sind u. A. Tonhöhe, Lichtfarbe, Klangfarbe.

Die Tonhöhe bildet eine Art Uebergang. Man wird sie nie als lineäre mathematische Grösse ansehen können. Denn dazu gehörte doch, dass von einem Unterschiede zweier Tonhöhen, der wieder eine Tonhöhe wäre, und von einer Theilung der Tonhöhe die Rede sein könnte. Zwar die physikalische Tonhöhe, die durch die Schwingungsdauer gegeben ist, welche also eine blosse Zeitdauer ist, wird unstreitig als lineäre Grösse zu behandeln sein, wenn man sie eben als blosse Zeitdauer auffasst oder als Zahl, indem man sie gleich der Anzahl Schwingungen in der Secunde setzt. Der

fast müssig ist, nun weiter auf die Vorgänge zwischen dem Empfindung erzeugenden Vorgang im Gehirn und dem Bewusstwerden selbst einzugehen, so sei hierüber doch Folgendes bemerkt. Ich stelle mir vor, dass das fühlende Ich ein getrennter selbstständig seelischer Vorgang ist, welcher entweder, je nach dem Bedürfnisse des Denkens, hie und da in der die Aussenwelt abbildenden Vorrichtung Erkundigungen einzieht über das, was dort vor sich geht, oder bei besonderen oder stärkeren in die Vorrichtung eindringenden Reizen sie unwillkürlich empfindet, wobei dann der Zustand in der Vorrichtung, der dem Reize entspricht, eine Fechner'sche Schwelle überschreiten d. h. einen gewissen Grad ersteigen muss, um zum Bewusstsein durchdringen zu können, ein Grad, der freilich von Ermüdung, Aufmerksamkeit, Anlage und Uebung abhängt.

Unterschied zweier Tonhöhen ist alsdann der Unterschied zweier Zahlen. Aber die physiologische, d. i. die empfundene Tonhöhe, wenn auch wohl schärferer und constanterer Bestimmung fähig als die Empfindungsgrade, gestattet solche Unterschiede nicht, und ist daher auch keine lineäre Grösse. Allein dadurch, dass ihre Verschiedenheit nur in der den meisten Menschen aller Culturstufen geläufigen Anordnung nach höher oder tiefer besteht, hat sie mit der lineären mathematischen Grösse einige Verwandtschaft, welche bei den anderen angeführten Grössen, der Lichtfarbe und Klangfarbe, fortfällt.

Die Lichtfarben sind an sich ganz verschiedenartige Eindrücke, in denen schwerlich Jemand vor Newton eine nothwendige Anordnung vermuthet hat. Mir wenigstens ist Nichts davon bekannt, dass die natürlichen Zerstreuungserscheinungen so gedeutet worden seien.

Auf alle Fälle aber lassen die Farben eine feste Anordnung zu, vermöge deren jede von ihnen einem besonderen Werth einer lineären Grösse entspricht, der Schwingungsdauer oder einer geeignet festzusetzenden Spectrumsabscisse. Zwischen den Farben bestehen zudem Beziehungen wie ihre complementäre Zuordnung. Mathematische Grössen sind sie also gewiss, wenn auch nicht lineäre.

Bei den bisher betrachteten Empfindungen war der Reiz unmittelbar als lineäre Grösse gegeben. Entweder war es ein mechanischer, z. B. Druckgefühl oder Schmerz erregender, oder, wie bei Wärmegefühl, Tonhöhe und Lichtfarbe etc., ein physikalisch auf lineäre Grössenabstufungen längst zurückgeführter Vorgang.

Bei den folgenden Empfindungen ist dagegen die Frage nach der Beschaffenheit auch des Reizes als Grösse zu berück-

sichtigen. Die Klangfarbe anlangend, so ist durch Hrn. Helmholtz die Natur der physikalischen Vorgänge, welche in der Luft und im Organ stattfinden, und denen eine empfundene Klangfarbe entspricht, genauer erforscht, wenn auch bei der verwickelten Natur der Erscheinungen die Beziehung zwischen Klangfarbe und Schwingungsart der Luft noch nicht so einfach und scharf bestimmbar, wie bei der Tonhöhe, sich erweist. Eine Anordnung der Vokale ähnlich der der Spectralfarben hat mein Vater aufgestellt*), welche den Beifall der Phonologen findet. Jedenfalls ist daher auch die Darstellung der empfundenen Klangfarbe als mathematischer Grösse angebahnt.

Endlich ist noch der Empfindungen des Geruchs- und Geschmacksorgans, insofern sie der Art nach verschieden sind, zu gedenken Bei ihnen ist überhaupt noch kein Anordnungsprincip weder des Reizes noch der Empfindung entdeckt. Die Empfindungen des Geschmacksorgans scheinen sich auf wenige Arten zu beschränken, während die des Geruchsorgans äusserst mannigfaltig sind, so dass hier ein ordnender Gedanke unstreitig ein wichtiger Fortschritt wäre.

Die Empfindungsgrössen erster Gattung, welche nach dem Grade sich unterscheiden, stehen zu den Empfindungsgrössen zweiter Gattung, die nach der Art geordnet sind, in der Beziehung, dass jede Empfindung zweiter Gattung eine besondere nach dem Grad sich abstufende Empfindungsfolge vorstellt. Jede Farbe, Tonhöhe, Klangfarbe, jeder Geruch und Geschmack kann eine nach der Intensität abgestufte Empfindungsweise bedeuten.

*) Cadmus oder allgemeine Alphabetik von Felix Henry du Bois Reymond pag. 153.

12. Sofern die Stimmungen als mathematische Grössen aufgefasst werden können, sind es sicher lineäre.

Verweilen wir noch ein wenig bei den seelischen Erscheinungen.

Auf die Empfindungen folgen die Stimmungen, wenn ich mit diesem Ausdruck die Seelenzustände bezeichnen darf, welche Wünsche, Willen erzeugen, und hierauf Handlungen auslösen, kurz die, wie Johannes Müller es allgemein nennt, Strebungen zur Folge haben. Es ist unverkennbar, dass froher Sinn und Betrübniss stetige Abstufungen dem Grade nach zulassen, und dass bei dem Schwanken der Stimmung derselbe Gemüthszustand unzählig oft durchlaufen wird, so dass auch bei Stimmungen von einem gleich die Rede sein kann. Nach Mehr oder Minder kann alles, was Leidenschaft und Affect genannt wird, sich unterscheiden, z. B. Furcht, Angst, Schrecken, Zorn, Wuth, ferner auch Behagen, Wollust u. s. f. Die Empfindungen und Wahrnehmungen verhalten sich zwar manchmal zu den Stimmungen etwa wie die Reize zu den wechselnden Empfindungen, indem sie unmittelbar Stimmung erzeugen. Im Allgemeinen aber liegt zwischen beiden seelischen Erregungen das Urtheil, weshalb wir ausser Stande sind, die Stimmungen lineären Grössen zuzuordnen. Gleichwohl besitzen sie zum Theil deren charakteristische Eigenschaften in auffallendem Maasse. So häufen sich z. B. Aerger und Freude durch kleine folgweise eintretende Ereignisse, von denen jedes für sich etwas Aerger oder Freude bereiten würde. Ich bin daher überzeugt, dass man im eigentlichen Sinne des Worts von doppelter Freude, doppelter Verstimmung zu reden berechtigt ist. Freilich wird die Auffassung der Stimmungen als mathematische Grössen

noch leichter angefochten werden können als die mathematische Natur der Empfindungen.

13. Die in der Mathematik selbst zum Vorschein kommenden Grössen sind zum Theil nicht lineär.

Die bis jetzt aufgeführten mathematischen Grössen sind sämmtlich im Gebiete der ausser- oder innerseelischen Wahrnehmungswelt gefunden. Solche Grössen wollen wir **wirkliche** nennen. Es giebt aber Grössen, welche der menschliche Denkvorgang erzeugt, und welche ausser aller unmittelbaren Beziehung zur Wahrnehmungswelt stehen. Die logischen Vorgänge bei der Combination der Grössen, einer der Lieblingsthätigkeiten des menschlichen Geistes, führen zu gewissen Symbolen, welche in der Mathematik Grössen genannt werden, und die nicht allein, wie überhaupt die mathematischen Zeichen, dazu dienen, stets wiederkehrende Schlüsse in ein Zeichen zusammenzufassen, so dass uns der Anblick eines solchen Zeichens die Wiederholung einer Reihe von Schlüssen erspart, sondern die eine discrete oder unendlich dichte Folge mathematischer Zeichen einer gewissen Gattung vorstellen.

Von besonderem Interesse sind jene Grössen, welche aus der Anwendung mathematischer Operationen über ihren natürlichen Gültigkeitsbereich hinaus*) oder aus der Verfolgung

*) Was Hankel das Princip von der Permanenz der formalen Gesetze genannt hat. Es ist aber vielleicht gewagt, aus etwas gelegentlich wenn auch noch so überraschend Zutreffendem, und wenn zur Zeit es noch an tieferer Einsicht in das Wesen der Erscheinung gebricht, schon ein Princip zu machen. Es giebt zahllose Fälle, in denen die formalen Gesetze nicht über ihr Gültigkeitsgebiet hinaus angewendet werden können, ohne zu ganz unbrauchbaren Ergebnissen zu führen. Z. B. gilt das formale Gesetz $\frac{d}{dx}\sum_1^\infty \Sigma u_p = \sum_1^\infty \frac{d}{dx} u_p$ in einem grossen Bereich von

gewisser Analogien entspringen, und welchen keine numerische Bedeutung mehr zukommt, so dass sie auch nie als lineäre Grössen werden aufgefasst werden können. Hier ist sich Jedermann darüber klar, dass sie Grössen genannt werden, nur weil sich mit ihnen ihrer Entstehung oder Definition gemäss rechnen lässt, wie mit wirklichen Grössen, freilich meistens unter Beschränkung oder Abänderung der Operationen, denen man die lineären Grössen unterwerfen darf.

Beim Complexen z. B. fällt das Grösser oder Kleiner fort, eine Unterscheidung, die in den Modul verlegt wird. Bei den »Unendlich der Functionen« entscheidet über das Grösser oder Kleiner nicht die Differenz sondern der Quotient*). Dergleichen in allen Gebieten der Mathematik immer zahlreicher zum Vorschein kommende Grössen kann man **analytische** Grössen nennen.

14. Endlich treten im gesellschaftlichen Verkehr mathematische Grössen auf, die Nichts mit den bisher angeführten gemein haben.

Aber auch die analytischen Grössen gehören im Grunde noch der Wahrnehmungswelt an. Die Aufgaben und Methoden der Mathematik dienen schliesslich sämmtlich den Zielen, welche der Trieb, die Welt mechanisch zu verstehen, uns steckt. Selbst die abgezogensten Lehren, welche die Analysis oder

---

Fällen. Darüber hinaus kommt aber nichts zum Vorschein als eine falsche Formel.

*) Die Idealist wird weiter unten zeigen, was es mit den infinitären Grössen für eine Bewandtniss hat. Namentlich die Eigenschaft der Theilbarkeit besitzen sie nicht im Sinne der lineären Grössen, weil aus der Theilbarkeit sogleich folgt, dass man sich jeder besonderen lineären Grösse bis auf beliebige kleine Unterschiede nähern kann, wie der Eins mit der Folge $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ Leipz. Ann. XI. Bd. *Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls*, Art. 9.

Geometrie, hier dem durch ein physikalisches Problem angeregten Gedankengang folgend, dort, wie man zu sagen pflegt, aus sich heraus ersann, besitzen für den Einsichtigen keinen geringeren Werth als eine unmittelbar praktischen Wünschen gerechte Methode. Sobald eine Grössencombination neu ist, genügt dies, um ihr Werth zu verleihen, denn wer kann wissen, ob sie nicht Morgen schon, wo wir es nicht entfernt vermuthen, die erwünschtesten Aufklärungen uns spenden wird! Ueber die wissenschaftlichen Bedürfnisse von Morgen sind wir zu urtheilen eben völlig ausser Stande, weil mit dem Vorrath von Unerforschtem in und ausser uns verglichen, unser Wissen und unser Scharfsinn eine *quantitas infinitesima* im eigentlichsten Sinne ist.

Aus dieser Bemerkung, welche zwischen den wirklichen und den mathematischen Grössen vermitteln soll, wolle man aber nicht schliessen, meine Ansicht sei, dass auch die Grenzen zwischen den höheren Spielen und der Mathematik zu löschen, und dass die Combinationen des Schachspiels denen z. B. der Algebra an wissenschaftlichem Range gleich zu achten seien, weil man ja bei jenen ebenfalls noch nicht wissen könne, wozu sie einmal dienen werden. Der allgemein gefühlte Rangunterschied zwischen den Combinationen des Schachspiels und denen der Mathematik scheint mir, abgesehen von dem sogenannten praktischen Nutzen, auf Folgendem zu beruhen.

Es kann nicht geläugnet werden, dass die Rösselsprungprobleme, besonders aber die sogenannten Endpartieen des Schachspiels, mit ihrem aus vorausgesetzten Anfangsstellungen weniger Figuren nothwendig sich ergebenden Schlusse den Charakter ächt mathematischer Aufgaben zeigen, nur innerhalb eines höchst beschränkten Combinationsgebiets. In die Spielpartie mischt sich aber ein ebenso unentbehrliches

wie unmathematisches Element, der Denkfehler. Die eigentliche Spielpartie gehört der Mathematik nicht an, weil sie Gegner voraussetzt, deren Denken menschlich unvollkommen ist. Schliesst man die Fehler aus, so wird aus dem Spiel allerdings ernste Combinatorik, allein es bietet alsdann Probleme dar von unzugänglichster Verwickelung. Man würde schon in Verlegenheit sein, wenn man nur erklären sollte, was unter einem vollkommen richtigen Schachzug zu verstehen sei *). So ausserordentlich schwierige Untersuchungen lohnt aber nicht die erwähnte Beschränktheit des Combinationsgebiets, und die somit verhältnissmässig geringe Zahl der Art nach neuer Ergebnisse, welche in Aussicht stehen. Aehnliches gilt von den höheren Kartenspielen, bei denen dem Zufall möglich wenig Einfluss eingeräumt ist.

Die in den Spielen zum Kampf benutzten Grössen, welche doch auch ihrem Werthe nach unterschieden werden, haben mit den erwähnten analytischen Grössen die Unwirklichkeit gemein, stehen aber nicht, wie diese, mit der Wirklichkeit in kaum minder enger Beziehung, wie viele wirkliche Grössen, namentlich aber entsprechen sie äusserst armen Combinationsgebieten. Wir geben ihnen den Namen Spielgrössen, und schliessen hiermit diese Uebersicht über die verschiedenen Grössenarten in der Wahrnehmungswelt.

15. Alles Bisherige weist darauf hin, dass wir vornehmlich den lineären Grössenbegriff auf das Genaueste zu untersuchen haben.

Hiermit also ist unsere Musterung beendigt. Nachdem wir nach so vielen Richtungen hin prüften, was unter mathematischer Grösse zu verstehen sei, haben wir den ungefähren Umfang dieses Begriffes kennen gelernt. Um unsere

*) Zwischen absolut richtig denkenden Wesen würde die ganze Partie sich darauf beschränken, um den ersten Zug zu loosen.

Ergebnisse kurz zusammenzufassen, so strebt die strenge Naturwissenschaft, in allem Veränderlichen stets dieselbe Grössenart wiederzuerkennen, nämlich die lineäre mathematische Grösse verbunden mit dem Anzahlbegriff, und kein unüberwindliches im Wesen der Sache liegendes Hinderniss scheint diesem Streben entgegenzustehen.

Die Forschungsgebiete, welche das Dunkel psychischer Vorgänge deckt, zeigen uns neben mancher nach Art der lineären abgestuften Grössenart, ja solchen, denen es vielleicht einst gelingt, die Uniform des Längenmaasses anzuziehen, auch Grössen ganz verschiedener Natur. Die übrigen Grössen, denen wir in der menschlichen Gedankenwelt begegnen, sind entweder Geschöpfe unserer wissenschaftlichen Denkmethoden oder sie dienen unserer Kurzweil.

Eine eigentliche schärfere Begriffsfestsetzung der lineären Grösse hat nun bis jetzt noch nicht stattgefunden. Wir gaben als ihre Haupteigenschaft an, dass sie ähnlich der Länge Maassvergleichungen gestatte, ja dass sie schliesslich selbst als Länge aufgefasst werden könne, ohne jedoch bestimmter auszuführen, was nun das Längenmaass selbst kennzeichne. Obenhin wurde als Zeichen der lineären Grösse eine gewisse Homogeneïtät aufgestellt, vermöge deren ihre Unterschiede, Theile und Vielfache wieder Grössen derselben Art seien. Endlich war auch von der Verschmelzung des Grössenbegriffs mit dem Zahlenbegriff die Rede.

Dies Alles muss nun auf das sorgfältigste ausgeführt werden, denn der Grössenbegriff ist der einzige und nothwendige Schlüssel zum Verständniss der übrigen analytischen Grundbegriffe.

Der lineäre Grössenbegriff, wie wir ihn jetzt beschreiben wollen, bietet sich dar in drei Stufen der Abgezogenheit. Zuerst ist er ein roher, ungenau vergleichender, der, wie bemerkt, kaum ausschliesslich menschlich sein möchte. Zum Zwecke der Messung verfeinert er sich und erhält den Inhalt, den wir als Ursprung der Mathematik ansehen dürfen. Wenn wir ihn auf Grund der gewöhnlichen und natürlichen Anschauung der Dinge nach bestem Können zergliedert haben werden, so wird es scheinen, und dieser Schein ist unser nächstes Ziel, als sei die genaue Beschreibung des Grössenbegriffs uns vollständig gelungen, und das letzte Wort über ihn gesagt.

Weiterhin aber werden wir finden, dass uns damit noch keineswegs über die Schwierigkeit des Grenzbegriffs hinwegzugeholfen ist. Dies zwingt uns sodann noch einmal zurückgehen auf die Entstehung des lineären Grössenbegriffs und ihn diesesmal bis zu seinen feinsten Wurzeln zu verfolgen. So zeigt sich, dass wahre Einsicht in das Wesen des Grössenbegriffs und des Grenzbegriffs untrennbar oder richtiger gleichbedeutend ist, wie ich dies schon vor Jahren aussprach*). Diese dritte Stufe der Abziehung des Grössenbegriffs fördert denn auch jenen merkwürdigen Gegensatz in den menschenmöglichen Grundanschauungen, dessen Eingangs gedacht wurde, an den Tag.

16. Schärfere Definition des lineären Grössenbegriffs.

Da die in der Ausdehnung unbeschränkten lineären mathematischen Grössen als Grössen wie Längen sich verhalten, so ist es nicht nöthig, stets ihre ganze Mannigfaltigkeit sich zu vergegenwärtigen, sondern es genügt eben einfach an Längen

*) Diese Untersuchung wurde von mir angekündigt in der Einleitung zu dem pag. 39 citirten Aufsatz: Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls.

zu denken. Indessen wollen wir die Bezeichnung Grösse beibehalten, indem wir die ausführlichere Angabe: »lineäre mathematische Grösse« nur anwenden, wo dieser Grössencharacter betont werden soll.

Die erste Stufe der lineären Grössenabziehung kennzeichnet sich durch:

Vergleichung ohne Maassvorstellung.

I. Die lineären mathematischen Grössen sind entweder gleich oder ungleich. Gleich sind sie, wenn ihre sinnlichen Erscheinungen unter denselben Bedingungen denselben Eindruck hervorbringen. Die eine ist grösser wie die andere, wenn ihr sinnliches Bild durch Exhaustion so abgeändert werden kann, dass es das der anderen vollständig enthält, und das umgekehrte Verhalten unmöglich ist.

II. Keine besondere unter den lineären Grössen einer Art, z. B. keine besondere Strecke unter allen möglichen Strecken besitzt an sich einen Vorzug, und wir haben mithin keine Vorstellung einer nothwendigen Schranke weder für die Kleinheit noch für die Grossheit einer Grösse.

III. Zwei oder mehrere Grössen derselben Art zusammengefügt ergeben wiederum eine Grösse derselben Art, die grösser ist als ihre Bestandtheile. Andererseits kann jede Grösse in beliebig viele andere derselben Art getheilt werden, und jeder Theil ist kleiner als die ungetheilte Grösse.

Während in dem ersten Theile der Eigenschaft III die Vorstellung der Summen gegeben ist, so enthält der zweite Theil von III unstreitig den Keim der Maassvergleichung, insofern darin nicht eine zufällige Zusammenstellung von Grössen auftritt, sondern schon eine solche, die ein gewisses Resultat ergiebt, und den Begriff des Unterschiedes erzeugt, der entschieden Maasscharakter besitzt. Es folgt somit die:

Vergleichung mit Maassvorstellung.

IV. Wenn eine Grösse grösser ist als eine andere zweite, so giebt es stets eine dritte von derselben Art, wie jene beiden, mit welcher vereinigt die zweite die erste ergiebt.

Nimmt man die zweite und dritte Grösse gleich an, so gelangt man von IV aus zur Theilung mit Maasseigenschaft. Denn da die Halbirung gewonnen ist, so könnten wir zu einer gegebenen Grösse eine solche zweite kleinere suchen, dass der Unterschied die Hälfte der kleineren sei u. s. f. So jedoch hat schwerlich das Geschlecht die nun folgenden allgemein menschlichen Anschauungen gewonnen. Für unsere Untersuchung genügt es aber, dass wir sie als allgemein menschlich voraussetzen dürfen, und fruchtet es nichts, über die Art ihrer Erwerbung in Muthmassungen uns zu ergehen.

Fügt man gleiche Grössen zusammen, wobei man im Belieben hat die Grossheit und die Anzahl dieser Grössen, so ist auch die Grösse, welche uns als deren Summe erscheint, eine beliebige. Wir haben die Vorstellung, dass eine noch so gross vorausgesetzte Grösse an Grossheit übertroffen werden kann durch eine Grösse, die zusammengesetzt ist aus untereinander gleichen Grössen, bei welchen entweder die Grossheit oder die Anzahl beliebig angenommen werden darf. Wir haben weiter die Vorstellung, dass irgend eine Grösse genau zusammenge-

setzt werden kann aus untereinander gleichen kleineren Grössen, deren Anzahl in unserem Belieben steht, und dass mit deren steigender Anzahl die Kleinheit der unter einander gleichen Theilgrössen jede noch so klein vorausgesetzte Grösse unterschreitet.

Wir besitzen diese Vorstellungen. Sie sind uns so natürlich und geläufig, wie die auf unsere körperlichen Bedürfnisse bezüglichen. Ob sie angeborene Denkform sind, oder dem Einzelnen durch Ueberlieferung eingepflanzt, oder durch eigene Beobachtung erworben, ist uns hier eben so gleichgültig, wie ihre Entstehungsweise aus einfacheren Vorstellungen.

Die Eigenschaften der Zusammensetzung und Theilung der Grössen sind die grundlegenden der Analysis, besonders aber die unbegrenzte Theilbarkeit der lineären mathematischen Grösse, welche den Grenzbegriff *in nuce* enthält. Wir wollen nunmehr diese Eigenschaften den obigen vier an die Seite stellen, jedoch in etwas anderer unseren späteren Zielen angemessener Form.

V. Man kann stets gleiche oder ungleiche Grössen, deren kleinste nicht unter eine beliebig klein anzunehmende Grösse fallen soll, in genügender Anzahl zusammenfügen, um eine Grösse zu erhalten, die nicht kleiner ist, als irgend eine vorgelegte derselben Art.

VI. Eine Grösse ist auf unzählige Weise in kleinere theilbar, unter welchen Theilungen sich die auszeichnet, bei der sie in zwei, drei oder mehr untereinander gleiche Grössen zerfällt. Die Theilung einer Grösse kann so lange fortgesetzt werden, bis die Theile sämmtlich klei-

ner werden als eine beliebig klein anzunehmende Grösse derselben Art. Wie weit getrieben die Theilung aber auch gedacht werden mag, stets sind die Theile Grössen derselben Art.

Ich will übrigens sogleich ausdrücklich bemerken, dass ich bei dieser Zusammenstellung es nicht als meine Aufgabe angesehen habe, die Eigenschaften des Begriffs auf ihr nothwendiges Maass zurückzuführen, also etwa die geringste Anzahl Wahrnehmungen zu ermitteln, auf Grund deren wir die Vorstellung der lineären mathematischen Grösse, wie wir sie jedoch zweifellos aus unzähligen verschiedenartigen Wahrnehmungen schöpfen, durch den Denkprocess würden gewinnen können. Dies verlangte eine besondere Untersuchung äusserst heikler Natur, die abseits von unserem Wege führt. Uebrigens könnte man auf die Frage nach der geringsten nothwendigen Anzahl Eigenschaften antworten erst nach vollständiger Durcharbeitung des Grössenbegriffs. Mein Ziel ist nur gewesen, eine solche Beschreibung des Begriffes zu liefern, dass Jedermann darin den ihm innewohnenden Begriff der lineären mathematischen Grössen der Geometrie und je nach dem Umfang seines Wissens auch die Eigenschaften zahlloser anderer lineärer Grössen aus den verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten wieder erkennt.

An die ersten rohen Vorstellungen von der lineären mathematischen Grösse, welche, wie betont, wahrscheinlich die älteste und verbreitetste Grundvorstellung von Dingen ist, die nur durch ihre Grossheit oder Kleinheit sich unterscheiden und zugleich genauere Maassvergleichung gestatten, schloss unstreitig der Begriff der Maasseinheit sich an, und der Ein-

heit folgten die gebrochenen Zahlen. Das Messen mit den Einheiten erhob sich zur Messkunst, und die Messkunst, bei Forschungen und Beobachtungen an Himmel und Erde vielfach angerufen, verallgemeinerte ihre Aufgaben, vertiefte ihre Einsicht, verbesserte ihre Methoden und wuchs allmählig zu dem Inbegriff von Kenntnissen und Lehren an, aus welchem in den letzten Jahrhunderten die Mathematik als selbstständige Wissenschaft hervorgegangen ist.

Dementsprechend betrachten wir noch die Verbindung des Grössenbegriffs mit dem Zahlbegriff, womit diese vorläufigen Festsetzungen über den Grössenbegriff ihren Abschluss finden.

Grösse, Zahl und literaler Formalismus.

17. Die Einheit und die Eins.

Um mehr als zwei mathematische Grössen mit einander vergleichen, vollends um über die Veränderung der Grössen mit Schärfe sich ausdrücken zu können, wird die Festsetzung der Grösseneinheit, schlechtweg der Einheit nöthig, d. i. einer bestimmten unter den zu vergleichenden Grössen einer Art, mit welcher die übrigen verglichen und gemessen werden. Die Theilbarkeit der Grösse allein erzeugt den Einheitsbegriff nicht, sondern, wie gesagt, das gleichzeitig auf mehrere Grössen gerichtete Augenmerk.

Irgend eine Entwickelungsstufe der Messkunst heischte sodann einmal die unbegrenzte Theilung der Einheit, um verschiedene Grössen unter einander mit Hülfe der Einheit genau vergleichen zu können. So mögen die gebrochenen Zahlen entstanden sein, welche in der Vorstellung doch stets auf etwas Getheiltes hindeuten. Man wird freilich auch hier mindestens zwei Entwickelungsstufen des Begriffes zu unterscheiden haben. Die einfachsten Bruchzahlen gehören ver-

muthlich kaum minder frühen Culturstufen, wie die ganzen Zahlen an, jegliches Theilungsbedürfniss, z. B. der Speisen, der Beute u. s. f. musste auf sie führen, während die Brüche mit grösseren Zählern und Nennern und überhaupt der entwickelte Begriff des Bruches, wie angegeben, schon der Messkunst angehören. Es ist lehrreich, den Begriff von der Grösse in seiner Verbindung mit den gebrochenen Zahlen und den Begriff von den ganzen Zahlen einander gegenüberzustellen.

Dem Begriff der ganzen Zahl liegt die Eins zu Grunde, welche himmelweit verschieden von der Einheit ist. Jede Einheit ist eine Eins, aber nicht jede Eins eine Einheit. Und es ist erfreulich, dass wir für diese durchaus verschiedenen Begriffe in unserer Sprache auch sogleich zwei Worte vorfinden. Beide Zahlenarten jedoch, die ganzen Zahlen und die gebrochenen Zahlen, vereinigen sich schliesslich durch den messenden Grössenbegriff zu einer Folge. Denn, wenn auch die Idee von der ganzen Zahl ohne den Grössenbegriff entsteht, und mit ihm unmittelbar nichts gemein hat, so setzt der Grössenbegriff, wie wir ihn beschrieben, schon den Begriff der Anzahl voraus und vervollständigt diesen Zahlbegriff durch die gebrochenen Zahlen.

Ganz beiläufig bemerkt, liegt es nach dem Gesagten nahe, in der sogenannten Zahlentheorie, sofern sie sich auf Erforschung der Beziehungen und Eigenschaften der ganzen Zahlen beschränkt, eine im Princip ausserhalb der Analysis stehende Disciplin zu erblicken, welche früher oder später ein abgeschlossenes Ganze bilden wird. Denn wie vielfach ihre Berührungen mit der Analysis auch sein mögen, wie oft noch diese ihr beispringen, und dafür auf dereinstige reichliche Vergeltung begründete Hoffnung sich machen mag, so kann

man doch kaum der Vermuthung sich erwehren, dass die Theorie der ganzen Zahlen eines inneren bei der Analysis zur Zeit wenigstens völlig undenkbaren Abschlusses fähig sei, und einst aus sich heraus alle ihre Sätze werde beweisen können. Es kommt mir natürlich nicht bei, die Beziehungen der ganzen Zahlen zur Analysis für begrenzt zu halten. Bei jedem veränderlichen Vorgang können gelegentlich hervortretende ganze Zahlen unsere Aufmerksamkeit fesseln und von entscheidender Bedeutung werden.

18. Ueber die Zahlen als Zeichen und als Grössen und über den Formalismus.

Wie also die gebrochenen Zahlen aus der Einheitstheilung zum Zwecke des Messens hervorgehen mussten, so findet man auch, sobald man ihre Bedeutung sich vergegenwärtigen will, dass sie untrennbar sind von der Vorstellung getheilter Gegenstände. Hiernach muss es widernatürlich erscheinen, die Analysis aus reinen Zahlen aufbauen zu wollen, ohne nach ihrem Ursprung, den Begriffen von der Anzahl und von der Grösse zu fragen. Wie gekünstelt eine solche Loslösung ausfallen muss, zeigt sich am deutlichsten, wenn es sich um die Grenze blosser Zahlen handelt. Die Zahlen sind entweder Zeichen für wirkliche Grössen, oder sie sind lediglich Figuren, deren man sich allerdings als Spielgrössen (vergl. Art. 14) bedienen kann.

Richtig ist, dass, wenn wir in eine numerische Ausrechnung oder in eine algebraische Untersuchung vertieft sind, es uns nicht einfällt, unter unseren Zahlen oder Buchstaben, welche unbestimmt gelassene Zahlen bedeuten, wirkliche Grössen beständig uns vorzustellen. Doch darf uns dies bei der Entwickelung der analytischen Grundbegriffe ebensowenig

verleiten, ihren wahren Ursprung zu verläugnen, wie die Sprachphilosophie aus ähnlichen Gründen bei der Thatsache der fertigen Sprache sich beruhigen könnte. Die Vorstellung des Zahlzeichens tritt beim raschen Denken an die Stelle der Vorstellung einer Beziehung zur Grösseneinheit. Aehnliches gilt in der That von der Sprache, insofern die Worte selbstständige Vorstellungen geworden sind. Während des Redens und Schreibens tritt an die Stelle des Flusses der wirklichen Vorstellungen wesentlich der Fluss der Wortvorstellungen, wenn auch während jener Thätigkeiten, wie einige Selbstbeobachtung zeigt, von den zugehörigen Vorstellungsgruppen im Magazin des Gedächtnisses eine oder die andere die Schwelle des Bewusstseins flüchtig überschreitet.

Von den beiden Aufgaben, das Gefüge der fertigen Sprache zu erforschen und die Entstehung der Worte und der grammatikalischen Formen aus der menschlichen Begriffsbildung abzuleiten, könnte man nun, weil man eben findet, dass die fertige Sprache sich von den Vorstellungen, welche durch ihre Worte bezeichnet werden, theilweise losgelöst hat, die zweite z. B. damit abzuthun sich berechtigt glauben, dass man die Sprache dem Menschen anerschaffen voraussetzte. Man hätte auf diese Weise allerdings die Hälfte der Arbeit sich geschenkt. Aehnlich wäre das Vorgehen des Analysten, der über die Grundlagen seiner Wissenschaft Forschungen anstellte, und der, indem er über den Grössenbegriff sich hinwegsetzte, in der Analysis nichts als numerische und literale Zeichenbeziehungen erblicken wollte.

Wie sehr der Formalismus bei den elementarsten arithmetischen Operationen uns im Stiche lässt, zeigt u. A. das Beispiel der Bruchmultiplikation. Wie kömmt man auf die

Regel von der Multiplikation der Brüche, also dass $^8/_{15}$ das Produkt von $^2/_3$ und $^4/_5$ ist? Die Euler'sche Ableitung*) verhüllt die Schwierigkeit, denn so kann die Regel nicht entstanden sein. Es scheint, dass man auch bei den ältesten Autoren eine Aufklärung über den ursprünglichen Sinn der Regel vergeblich sucht**). Wenn man aber darauf verzichtet, aus blossen Zeichen einen Gedanken zu ziehen, und die Brüche auffasst als das, was sie wirklich sind, nämlich als Bruchtheile

---

*) Euler definirt $^2/_3 \cdot {}^4/_5$ als $^2/_3$ von $^4/_5$, womit allerdings das Resultat sichergestellt ist (s. Eulers Algebra § 106.).

**) Um mich darüber zu unterrichten, wie die Regel in den ältesten Darstellungen der Rechenkunst abgeleitet wird, ersuchte ich Hrn. Cantor in Heidelberg um Auskunft, der die Güte hatte, mir folgenden Bescheid zu geben: »Das älteste Rechenbuch, welches wir besitzen, aus dem Jahre 1700 v. Chr. etwa (Papyrus des Ahmes übersetzt von August Eisenlohr) hat Bruchmultiplicationen aller Art und zwar meistens mit unbenannten Zahlen, eine Begründung von $\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$ ist nicht vorhanden. Die Rechnung ist so ausgeführt, dass ebensowohl $\frac{a}{b}$ als $\frac{\alpha}{\beta}$ in Partialbrüche vom Zähler 1, in sogenannte Stammbrüche zerfällt erscheint: $\frac{a}{b} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + .. , \frac{1}{b_m}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}$. Dann heisst es:

$$\frac{1}{b_1}\left[\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}\right] = \frac{1}{b_1\beta} + \frac{1}{b_1\beta_2} + .. + \frac{1}{b_1\beta_\mu}$$
$$\frac{1}{b_2}\left[\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}\right] = \frac{1}{b_2\beta_1} + \frac{1}{b_2\beta_2} + .. + \frac{1}{b_2\beta_\mu}$$
$$\frac{1}{b_m}\left[\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + .. + \frac{1}{\beta_\mu}\right] = \frac{1}{b_m\beta_2} + \frac{1}{b_m\beta_2} + .. + \frac{1}{b_m\beta_\mu},$$

und nun werden alle Theilproducte vereinigt, entweder durch blosses Nebeneinanderschreiben der ihrer Grösse nach geordneten Theilbrüche aller Producte, oder aber durch Addition einiger z. B. $^1/_3 + {}^1/_6 = {}^1/_2$, oder endlich durch Zurückführen auf einen Generalnenner, und dabei erscheint natürlich $\frac{a\alpha}{b\beta}$.«

lineärer Grösseneinheiten, so liegt der wahrscheinliche Ursprung jener Regel auf das Klarste vor Jedermanns Augen. Neben der Längeneinheit wurde für die Ausmessung der Flächengebiete auch die Flächeneinheit nöthig und als deren zweckmässigste, weil auf das Längenmaass anschaulich zurückgreifende Form das Quadrat erkannt. Die nächst dem Quadrat einfachste (geradlinig begrenzte) Flächenform, das Rechteck ergab, falls seine Seiten Vielfache der Quadratseiten waren, das unmittelbarste Bild von der Multiplication ganzer Zahlen. Rechtecke, die kleiner waren, als das Einheitsquadrat, erheischten die Theilung des Einheitsquadrats, und mussten somit zur Bruchmultiplication führen. Wir setzen bei diesem Rückblick selbstverständlich nur rationale Längenverhältnisse voraus. Irgend ein findiger Kopf theilt das Rechteck mit den Seiten $^2/_3$ und $^4/_5$, und zugleich das Einheitsquadrat in Quadrate mit der Seite $^1/_{15}$, um beide vergleichbar zu machen, und erkennt sogleich, dass das Rechteck $^8/_{15}$ des Quadrats ausmacht. Man glaubt sie zu sehen, die sich sesshaft machenden Jäger, wie sie nun ihre Streitigkeiten einstellen, und ihren Landbesitz fortan nach dieser Regel unter sich vertheilen. Jedenfalls wird so die Bruchmultiplication eine ganz natürliche, höchst einleuchtende Fortsetzung der Multiplication der ganzen Zahlen, und ihre Erfindung kann sehr wohl in die frühesten Epochen der prähistorischen Messkunst fallen.

Ein rein formalistisch-literales Gerippe der Analysis, worauf die Trennung der Zahl nebst den analytischen Zeichen von der Grösse hinausliefe, würde diese Wissenschaft, welche in Wahrheit eine Naturwissenschaft ist, wenn sie auch nur die allgemeinsten Eigenschaften des Wahrgenommenen in den Bereich ihrer Forschungen zieht, schliesslich, wie bemerkt, zum

blossen Zeichenspiel hinabwürdigen, wo den Schriftzeichen willkürliche Bedeutungen beigelegt werden, wie den Schachfiguren und Spielkarten. So ergötzlich ein solches Spiel sein kann, ja so nützlich für analytische Zwecke die Lösung der Aufgabe sich erweist, die Regeln zwischen den Zeichen, welche aus der Grössenvorstellung hervorgingen, nun bis in ihre letzten formalen Consequenzen zu verfolgen, so würde dennoch diese literale Mathematik, wenn sie von dem Boden, auf dem sie gewachsen, völlig losgelöst würde, bald genug in unfruchtbaren Trieben sich erschöpfen, während die von Gauss so wahr und tief Grössenlehre genannte Wissenschaft in dem natürlichen stets an Umfang zunehmenden Wahrnehmungsgebiet des Menschen eine unversiegbare Quelle neuer Forschungsgegenstände und erspriesslicher Anregungen besitzt. Ohne Frage wird man mit Hülfe von sogenannten Axiomen, von Conventionen, ad hoc erdachten Philosophemen, unfassbaren Erweiterungen ursprünglich deutlicher Begriffe nachträglich ein System der Arithmetik construiren können, welches dem aus dem Grössenbegriff hervorgegangenen in allen Puncten gleicht, um so die rechnende Mathematik gleichsam durch einen Cordon von Dogmen und Abwehrdefinitionen gegen das psychologische Gebiet abzusperren. Auch kann ein ungewöhnlicher Scharfsinn auf solche Constructionen verwendet worden sein. Allein man würde auf dieselbe Weise auch andere arithmetische Systeme sich ausdenken können, wie dies ja geschehen ist. Die gewöhnliche Arithmetik ist eben die einzige dem lineären Grössenbegriff entsprechende, ist gleichsam seine erste Registrirung, während die Analysis, mit dem Grenzbegriff an der Spitze, seine höchste Entwickelung bildet. Auch die Schwierigkeiten des Grenzbegriffs, denen wir alsbald furchtlos die Stirne bieten werden, mag man durch Symbolik beseitigen

zu können glauben. Es wird schwerlich gelingen. Denn jeder Analyst, in dem mehr steckt, als ein Combinatoriker, wird dem Ursprung des Zeichenspieles nachgehen wollen, und also doch wieder vor die umgangenen Probleme sich gestellt sehen.

Es soll natürlich nicht gerügt werden, wenn man im Unterricht bei den Schwierigkeiten der Grundbegriffe — jedoch ohne sie zu verschweigen — nicht verweilt, um von angemessenen Voraussetzungen aus sogleich *in medias res* zu gelangen. So wird ein Sprachlehrer seinem Schüler, der rasch französisch lernen will, nicht stundenlange Vorträge über die Entstehung und Verbreitung der Lingua franca halten.

In diesem Sinne hätte ich gegen Hrn. Heine's Gedanken*) als Ausgangsbegriff der Functionenlehre die auf Grund des allgemeinen Convergenzprincips als convergent sich erweisenden Zahlenreihen zu wählen, wodurch nicht allein die Reihengrenze, sondern auch das allgemeine Convergenzprincip mit einem Schlage ausser Discussion gestellt ist, nur einzuwenden, dass dieser Ausgangspunct mir etwas weit in das eigentliche Lehrgebiet der Functionentheorie hinein verlegt scheint. Man kann, auch ohne mit den bedenklichen Grundbegriffen in Berührung zu kommen, bei viel beschränkteren Voraussetzungen es bewenden lassen, von denen alsdann, wie man sehen wird, ganz kurze Wege zu dem Ausgangspunct Hrn. Heine's führen.

Wie dem auch sei, es ist hier nicht der Ort, auf Veranstaltungen, die practischen Lehrzwecken gelten, des Näheren einzugehen, da diese Schrift ja gerade die Erörterung der Grundprobleme sich zur Aufgabe stellt.

---

*) Die Elemente der Functionenlehre, Borchardt's Journ. Bd. 74.

Von Nichtmathematikern ist häufig genug der Versuch gemacht worden, die Mathematiker über die Grundbegriffe ihrer Wissenschaft aufzuklären. Wir sahen in der Geometrie, dass es schliesslich doch die ernste und zielbewusste Arbeit der Mathematiker selbst gewesen ist, welche die Bahn von den Sinneswahrnehmungen zu den Sätzen der Wissenschaft frei legte. Auch die Grundbegriffe der Analysis wird nur die sorgfältigste Untersuchung mit unserem unmittelbaren Vorstellungssystem in ununterbrochenen Zusammenhang bringen. Es ist dies eine wissenschaftliche Aufgabe wie jede andere, welche heischt, dass bei ausreichender Sachkenntniss ihr die volle Arbeitskraft gewidmet werde.

19. Endgültige Fassung des Problems über den Grenzbegriff.

Die obigen Betrachtungen führen denn endlich zu folgender Fassung unseres Problems.

Es soll bewiesen werden der Satz:

Jeder Decimalbruch $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots \frac{\alpha_n}{10^n}$ nähert sich bei hinreichend vergrössertem n bis zu beliebig kleinen Unterschieden einem Grenzwerth. Unter den Brüchen o, α_1; $o, \alpha_1 \alpha_2$; $o, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$; etc. sind Vielfache von Zehnteln, von Hunderttheilen u. s. f. einer Längeneinheit zu verstehen, deren Endpuncte 0 und 1 seien. Trägt man die Strecken o, α_1; $o, \alpha_1 \alpha_2$; ... auf der Einheitsstrecke 0 ... 1 von dem Ende Null an ab, so verdichten sich deren dem Ende Eins zugewendeten Endpuncte immer mehr, und der Grenzpunct schliesst die sich in's Unbegrenzte verdichtende Punctfolge derart

ab, dass alle Endpuncte an seiner der Null zugewendeten Seite liegen, wobei die Entfernungen der Endpuncte o, α_1; $o, \alpha_1\alpha_2$; ... vom Grenzpunct unter jede beliebig klein anzunehmende Strecke sinken.

Diese geometrische Fassung des Problems soll nun eben keine Voraussetzung sein, keine Beschränkung enthalten, sondern die Betrachtung dieses Capitels über den Grössenbegriff hat gerade das Ziel verfolgt, darzuthun, dass wir innerhalb der vollkommensten Schrankenlosigkeit des Denkens unter der hypothetischen Grenze nichts Anderes als eine vorstellbare lineäre Grösse uns denken dürfen, also am zweckmässigsten eine Länge. Eine abstracte numerische Grenze ist eine Redensart, jeglichen Sinnes baar, und wir thun der Allgemeinheit unserer Untersuchung nicht den geringsten Eintrag, wenn wir unter der hypothetischen Grenze eine lineäre mathematische Grösse uns denken und dem Problem den vorstehenden Ausdruck geben.

Und nun endlich eröffne ich die Discussion des Idealisten und des Empiristen über das vorgelegte Problem.

Die idealistische und die empiristische Anschauungsweise über Grenze und Grösse in der Analysis.

Das idealistische System.

IDEALIST.

20. Grenzbegriff. Es wird festgestellt, dass das Dasein der Grenze eines Beweises bedarf.

Ich lege der Grössenlehre die genaue Länge zu Grunde, und stelle mir unter der Einheit ein Stück einer vollkommen genauen Geraden vor, dessen Endpuncte ich mit 0 und 1 bezeichne. Auf dieser Strecke kennen wir unzählige verschiedenartig festgelegte Puncte, unter welchen namentlich die Punctarten hervorzuheben sind, von denen Vertreter in jeden noch so kleinen Bruchtheil der Einheitsstrecke hineingedacht werden können. Da sind die rationalen Längen, d. i. Halbe, Drittel, Viertel etc., oder Vielfache solcher Theile der Längeneinheit. Da sind auch unzählige construirbare Längen, die nicht rationale Bruchtheile der Einheit, sondern Wurzeln rationaler Zahlen sind, und deren rationale Bruchtheile und Vielfache. Diese Punctarten lassen sich in Gedanken unbegrenzt vermehren, und so füllt sich in unserer Vorstellung die Einheitsstrecke mit immer dichteren Punktmengen. Allein wie sehr wir die Zahl dieser Puncte auch anwachsen lassen mögen, sie fliessen, wenn wir genau denken, nie zusammen, sondern je zwei benachbarte bleiben stets getrennt

durch ein Stück gerader Linie, welches, bis auf seine Länge, völlig der Einheitsstrecke gleicht. Dies ist das Bild, von dem meine Grössenvorstellung stets begleitet wird.

Ich führte eben, als auf der Strecke 0...1 unterschiedene Puncte an, nur die rationalen Bruchtheile sowohl der Einheit selbst, als auch der geometrisch-construirbaren Linien. Wir wollen diese Punkte im Folgenden als bereits bekannte, gegebene ansehen, zu welchen auf sogleich näher zu beschreibende und untersuchende Weise neue Puncte hinzukommen. Die Entstehungsweise von Puncten, um die es sich jetzt handeln soll, entspricht dem analytischen Grenzübergang. Der neue Punct schneidet eine Strecke auf der Einheit ab, welche die sogenannte Grenze, eine Folge immer weniger von einander verschiedener Strecken ist.

Es mögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ Zahlen der Folge $0, 1, 2, \ldots 9$ vorstellen, und es sei ein Gesetz gegeben um die Reihe:

$$0,\alpha_1\alpha_2 \ldots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots$$

in's Endlose fortsetzen zu können. Falls die α_p von einer Stelle an periodisch wiederkehren, so nähert sich die Summe $0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ mit wachsendem p einer Rationalzahl, wie aus der elementaren Arithmetik bekannt ist. Denkt man sich jetzt auf der Längeneinheit 0...1 von 0 an abgetragen die Strecken

$$0,\alpha_1 \; ; \; 0,\alpha_1\alpha_2 \; ; \ldots 0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$$

so sind diese selbst rational, nämlich Vielfache von Zehnteln, Hunderttheilen u. s. f. der Einheitsstrecke, und im Falle der Periodicität des endlosen Decimalbruchs hat mithin vorstehende Folge eine Grenze L, welche ebenfalls durch einen rationalen Punct auf der Strecke 0...1 dargestellt ist, und welche die Bedingung erfüllt, dass $L - 0,\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p$ mit zunehmendem p unter jede Kleinheit sinkt.

Wenn aber die Folge der α_p nicht periodisch ist, und auch keine der vorhanden angenommenen Punctarten einen Punct L enthält, welcher die $L—o,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$ betreffende Grenzenbedingung erfüllt, so ist die Behauptung, mit der wir uns hier zu beschäftigen haben, die, dass durch die Folge:

$$o,\alpha_1\ ;\ o,\alpha_1\alpha_2\ ;\ \ldots\ o,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$$

ein neuer Punct auf der Längeneinheit bestimmt wird, d. i. durch diese Folge in das Gebiet unserer Vorstellungen mit zwingender Nothwendigkeit eingeführt wird. Er heisst sodann die Grenze dieser Folge. Da jedoch nach der Annahme dieser Punct nicht zu den von uns als bekannt angesehenen Punctarten gehört, so unterliegt es keinem Zweifel, dass sein Vorhandensein erst bewiesen werden muss, und sein Dasein eine Hypothese ist und bleibt, wenn ein solcher Beweis nicht gelingt. Dies ist also jetzt zu untersuchen.

21. Grenzbegriff. Ueber die Beweismethoden für das Vorhandensein der Grenze.

Es giebt, soviel ich übersehe, nur zwei Hauptgesichtspuncte, nach denen das Dasein der Grenze L von $o,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p$ bewiesen werden könnte. Nach dem ersten wird der Grenzpunct L als Grenze einer Strecke dargestellt, deren Länge ohne Ende abnimmt und unter jede Kleinheit sinkt. Nach dem zweiten wird er als Trennungspunct zweier Strecken aufgefasst.

Der erste Beweis lässt sich so darstellen.

Zunächst hat man für jedes p und q

$$o,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q < o,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p + 1$$

weil

$$\frac{1}{10^p} = \frac{9}{10^{p+1}} + \frac{9}{10^{p+2}} + ..$$

ist, und nach der Voraussetzung, dass $o,\alpha_1\alpha_2..$ keine Rational-

zahl ist, die α nicht von irgend einer Stelle an alle gleich 9 sein können.

Construirt man also auf der Längeeinheit eine die Puncte $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ und $o, \alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_p + 1$ verbindende Strecke s_p von der Länge $\frac{1}{10_p}$, so nehmen alle Strecken $o, \alpha_1 \alpha_2 .. \alpha_n$ wie gross n auch sein mag, darin ein Ende, so dass auch die hypothetische Grenzlänge L, welche dadurch gekennzeichnet ist, dass der Unterschied $L—o, \alpha_1 .. \alpha_n$ durch Vergrösserung von n beliebig klein gemacht werden kann, in diese Strecke s_p fallen muss. Nun denken wir uns p grösser und grösser gewählt, alsdann wird s_p beliebig verkleinert werden, und jedes folgende s_p ist in allen vorigen s_p enthalten. Auf diese Weise lässt sich der hypothetische Punct zwischen fort und fort engere Grenzen einschliessen. Lassen wir jetzt die Strecke s_p Null werden, so fallen schliesslich ihre Endpuncte zusammen und in den hypothetischen Punct L, dessen Dasein damit erwiesen wäre.

Dies ist jedoch kein Beweis, sondern eine Erschleichung. Thatsächlich ist nämlich die Strecke s_p begrenzt von Puncten der als gegeben vorausgesetzten Arten und bleibt es in's Endlose. Auf Grund unserer Voraussetzungen können wir die Strecke allerdings in's Unbegrenzte verkleinern. Dies ist aber ein Vorgang, der in unserer Vorstellung nichts dem Wesen nach ändert. Gross oder klein, bleibt die Strecke s_p immer eine Strecke zwischen zwei rationalen Puncten. Lassen wir nun plötzlich ohne logische Begründung an die Stelle der Strecke einen Punct treten, so ist dies ein Act, bei dem wir offenbar willkürlich eine neue Vorstellung einführen, sie unvermittelt auf die erste folgen lassen, und genau das vor-

wegnehmen, was bewiesen werden sollte. Ein allmähliges Zusammenfallen zweier Puncte, wie man dies Geschehen auch wohl bezeichnet findet, ist vollends Unsinn. Die Punkte sind entweder durch eine Strecke getrennt, oder es ist nur ein Punct da, ein Mittelding giebt es nicht.

Das andere Beweisverfahren ist Folgendes:

Die Puncte, welche wir uns auf der Einheitsstrecke gegeben denken, zerfallen 1) in solche, die einmal in eine der folgweise aufgetragenen Strecken o, α_1 ; $o, \alpha_1\alpha_2$; u. s. f. fallen; 2) in solche, bei denen dies nie eintritt; 3) in hypothetische Puncte solcher Art, dass sie keiner der beiden ersten Arten angehören. Es ist zunächst leicht zu zeigen, dass zur dritten Kategorie entweder kein oder höchstens ein Punct gehört. Denn es gelten folgende zwei Bemerkungen: Erstens: sobald ein Punct zu 1. gehört, gilt Gleiches von allen Puncten zwischen Null und ihm, und sobald ein Punct zu 2. gehört, gilt Gleiches von allen Puncten zwischen ihm und Eins. Zweitens, alle decimalen Puncte gehören einer der beiden Kategorien 1. oder 2. an.

Hieraus folgt, dass es nicht zwei Puncte der Kategorie 3. geben kann. Denn man kann in das Intervall zwischen ihnen decimale Puncte hineindenken. Also müsste, da diese entweder gedeckt oder nicht gedeckt werden, auch der eine der beiden Puncte 3. gedeckt oder nicht gedeckt werden, gegen die Voraussetzung. Mithin kann es nur einen oder keinen Punct der Kategorie 3. geben.

Aus der ersten Bemerkung folgt nun, dass die Strecken, auf denen die Puncte der einen oder der anderen der beiden ersten Kategorien liegen, zusammenhängend sind, so dass der Punct 3. Art, wenn er vorhanden ist, nur der gemeinsame

Endpunct beider Strecken sein kann. Wenn aber die Einheitstrecke in zwei Strecken zerfällt, mit je solchen Puncten, die einmal gedeckt werden, und die nie gedeckt werden, so muss ihr gemeinsamer Endpunct zugleich die hypothetische Grenze L sein, da er eben ein Punct ist, der die Bedingung $lim\ (L-o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p) = o$ erfüllt, woraus noch folgt, dass ein Punct 3. Art unmöglich ist, weil der Grenzpunct nie gedeckt wird.

So überzeugend diese ganze Auseinandersetzung klingt, so ist doch auch sie eine Erschleichung, obgleich weniger augenfällig, wie der vermeintliche erste Beweis; ja ich gestehe, dass ich eine Zeit lang damit den Beweis für den Grenzbegriff wirklich entdeckt zu haben wähnte.

Um sogleich mit einem Wort die schwache Stelle des Beweises zu kennzeichnen, so wäre er völlig streng, wenn wir den geometrischen Grössenbegriff noch um einen Zusatz erweiterten: diesem nämlich, dass die Länge aus Puncten besteht. Dies wird sogleich einleuchten.

Zunächst bemerke ich, dass bis zu dem Absatz, der mit: »Aus der ersten Bemerkung folgt nun« beginnt, das Gesagte einwandsfrei ist. Nur die in diesem Absatze enthaltene *conclusio* des Beweises ist unbefriedigend.

Wir gewinnen einen Standpunct, von dem aus auch ohne Prüfung ihrer einzelnen Schlüsse der Werth solcher Beweise sich beurtheilen lässt, indem wir zusehen, was auf Grund unserer Grössenvorstellung, wie sie Eingangs des idealistischen Systems vorgelegt wurde, überhaupt bewiesen werden kann.

Der vorausgesetzte Grössenbegriff liefert uns nichts weiter als eine genaue Länge 0 . . . 1, und auf dieser zahllose Puncte,

die wir allerdings beliebig dicht uns denken können. Aber, wie bemerkt, bei jedem einzelnen Vorstellungsact (effort d'imagination), der einem bestimmten, nicht nebelhaft verfliessenden Bild entspricht, stellen wir uns zwischen benachbarten Puncten immer ein Stück gerader Linie vor, welches völlig — bis auf seine Länge — der Einheit gleicht. Von jeder Punctart, aus welcher die auf der Einheitsstrecke gegebenen Puncte bestehend gedacht werden, gilt, was wir von den Decimalen sagten, dass sie entweder zur Kategorie 1. oder zur Kategorie 2. gehören müssen. Also können wir sagen, dass die gegebenen Puncte bis zu einem Punct N incl. der Kategorie 1. und von einem Punct N' incl. an der Kategorie 2. angehören; dass ferner N und N' beliebig nahe sind; endlich dass zwischen ihnen kein Punct von den als gegeben vorausgesetzten liegen kann. Genau, unerbittlich genau nur dies kann bewiesen werden und im Obigen bewiesen sein.

Die Erschleichung liegt hiernach offenbar darin, dass wir durch die als bekannt vorausgesetzten Puncte Strecken als bestimmt annehmen, ohne dass deren Enden angegeben sind. Eine Strecke ist nur durch ihre beiden Endpuncte bestimmt. Die beiden Strecken, in welche die Einheit $0 \ldots 1$ zerfällt, haben gewiss die Endpuncte 0 und 1, der gemeinsame Begrenzungspunct ist aber durch den ersten Theil des Beweises nicht bestimmt. Die eine Strecke ist eben nur bis zu einem Punct N der vorgestellten Punctmenge, die andere von einem ähnlichen Punct N' an bestimmt. Ueber ihren Verlauf zwischen diesen Puncten ist nichts ermittelt. Wir können freilich in der Vorstellung die Dichtigkeit der Puncte beliebig vergrössern. So werden an die Stelle der Strecke $N \ldots N'$ andere $N_1 \ldots N_1'$ treten, die stets den vorhergehenden angehören und unter jede Schranke der Kleinheit

sinken. Sie bleiben trotzdem aber eine Strecke, und, wie dies beim ersten Beweisfahren eindringlich hervorgehoben wurde, ist durch solchen Verkleinerungsvorgang in der Vorstellung dem Wesen nach Nichts geändert; vielmehr ist das Nullsetzen der Strecke oder der Uebergang der Strecke zum Punct ein Willkühract, den ein wirklicher Beweis nicht duldet.

Wenn wir aber die Vorstellung der Länge wesentlich verändern und sie nicht blos als Trägerin schon bekannter Puncte auffassen, sondern lediglich als ein Aggregat von Puncten, die Vorstellung also aufgeben, dass Linie und Punct etwas durchaus Verschiedenes seien, so bricht offenbar diese Kritik des zweiten Beweisverfahrens zusammen, und es muss ihm volle Strenge zuerkannt werden. Wir werden in der Vorstellung allerdings vielleicht nicht alle Puncte, aus denen die Strecke besteht, uns denken können; aber es genügt, dass sie vorhanden seien. Sie werden immer in einmal und in nie zur Deckung gelangende zerfallen, und von den Puncten dritter Art wird es nur einen geben können, der aber, da ein Punct keine Länge hat, nicht in Betracht kommt oder mit dem gemeinsamen Endpunct der beiden Strecken übereinkommen muss. Denn der Endpunct der Strecke mit bedeckten Puncten wird niemals selbst bedeckt, d. i. die Grenze wird nie erreicht.

Man fühlt übrigens, dass, sobald die Länge als aus Puncten bestehend vorausgesetzt wird, damit überhaupt jede Grenzlänge schon vorausgesetzt ist, und dass diese Vorstellungsweise daher einen ganz anderen Ideengang erzeugen muss, als den hier verfolgten.

Diese Vorstellung ist aber keine reinliche, durchsichtige. Man kann freilich die Vorstellung eines Stiftes mit spitzem Ende, welcher einen feinen Strich zeichnet, zu ihren Gunsten

anführen. Aber darin liegt die Idee der Bewegung, der Strich ist die Bahn der bewegten Spitze. Die ruhende, feste Raumvorstellung wird niemals das Bild einer genauen, gleichförmigen Linie aus dem einer noch so dichten Punctreihe entstehen lassen. Denn Puncte sind eben dimensionslos, und daher kann eine beliebig dichte Folge von Puncten niemals eine Entfernung werden, sondern man wird die Entfernung immer als die Summe der Abstände der Puncte ansehen.

Die Auffassung der Linie als Punctfolge entspringt wieder demselben logischen Sprunge, den wir schon zweimal rügten. In der That ist die Folge von Puncten auf der Strecke mit ihren beliebig kleinen Entfernungen eine Vorstellung, deren Wesen durch endlos fortgesetzte Verkleinerung der Punctentfernungen nicht geändert wird. Nehmen wir aber diese Entfernungen plötzlich gleich Null an, so springen wir wieder nach Willkühr und ohne Vermittelung zu einer Grenze über, welche zudem diesesmal nicht allein unvorstellbar, sondern geradezu ungereimt oder doch paradox ist. Ich verwerfe also die Erweiterung des Grössenbegriffs, nach welcher die Linie aus Puncten, die Fläche aus Linien u. s. f. zusammengesetzt sein soll.

Wie vorher gezeigt, muss ich alsdann auch auf einen Beweis für das Dasein der Grenze L des Decimalbruchs $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ auf Grund meiner Eingangs gemachten Voraussetzungen verzichten.

Man fordert auch in der That Unmögliches, wenn eine aus den gegebenen Puncten herausgegriffene Punctfolge einen zu dem gegebenen nicht gehörigen Punct bestimmen soll. Für so undenkbar halte ich dies, dass ich behaupte, keine Denkarbeit werde einen solchen Beweis für das Dasein des Grenzpunctes je einem Gehirn abfoltern und vereinigte es

Newton's Divinationsgabe, Euler's Klarheit und die zermalmende Gewalt Gaussischen Geistes.

Gleichwohl entspricht es der allgemeinen Anschauung, dass der Decimalbruch $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ *in inf.* einen Werth vorstellt, den wir durch eine Länge oder eine andere mathematische Grösse, z. B. ein Gewicht, versinnlicht uns denken können. In der That haben ja unzählige Decimalbrüche eine Grenze, die als Länge gedacht werden kann, und weder die Decimalbrüche, noch die Längen haben an sich irgendwelche Eigenschaft, die auch nur den leisesten Verdacht erwecken könnte, dass in Bezug auf eine so allgemeine Eigenschaft, wie die Zusammengehörigkeit zwischen Decimalbruch und Grenze, ein Unterschied zwischen ihnen möglich wäre. Endlich kommt man der hypothetischen Grenze jedenfalls beliebig nahe, d. i. man kann eine Grösse L_1 finden, der Art, dass $L_1 - o_1 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ für keine Ordnung p eine beliebig kleine Länge erreicht, indem man die hypothetische Grenze, wie oben gezeigt, in ein geeignetes Intervall einschliesst.

22. Die bisherige Betrachtungsweise war nicht erschöpfend. Sie wird vervollständigt im idealistischen Sinne.

Wenn wir aus unseren Vorstellungen den Grenzpunct L nicht mit Nothwendigkeit schliessen konnten, so ist er entweder wirklich nicht vorhanden, oder wir haben unsere Vorstellungen noch nicht genügend ausgenützt. Sie enthalten noch Beziehungen, die wir nicht berücksichtigten. Denn, falls unsere Grössenvorstellung erschöpfend ist und ihre Verbindungen mit unserem übrigen Vorstellungssystem offen liegen, so müssen daraus die Grenzpuncte, wenn sie vorhanden sind, mit Nothwendigkeit folgen.

Wir haben in der That eine wesentliche Frage uns noch

nicht vorgelegt. Untersuchen wir noch einmal die Entstehung der Grenze *L*. Das von uns Uebersehene wird sogleich in's hellste Licht treten, wenn wir die Frage mehr physikalisch auffassen.

Als Idealist glaube ich an die Wirklichkeit meiner Ideale. Ich glaube an die Wirklichkeit meiner bis an die äussersten Marken meines Denkens verfolgten Ideen, wenn sie auch in Wahrheit, wie das Unendliche, unvorstellbar sind. Ich glaube an das Unendliche und an das wirkliche Vorhandensein genauer geometrischer Gebilde, oder richtiger an ihre Möglichkeit. Denn diese will sagen, dass nur zufällige unwesentliche Umstände ihrem Vorhandensein entgegen stehen können, wie es doch möglich ist, dass zwei Uhren vollständig gleich gehen. Und alle Schlüsse, welche wir auf solche Voraussetzungen gründen, müssen auch in den Bereich der Möglichkeit, oder je nach ihrer Natur in den der Wirklichkeit fallen.

Nun sei eine genaue Länge nicht nur gedacht, sondern irgendwo vorhanden. So werden die Längen o, α_1 ; $o, \alpha_1\alpha_2$; etc. ebenfalls vorhanden sein, und dann ist ihr Grenzpunct entweder eine Wirklichkeit, oder es giebt keinen. Dies Alles ist unabhängig davon, ob es in der Welt denkende Gehirne giebt. Wir haben daher nicht zu fragen:

Können wir von unseren Ausgangsvorstellungen aus auf irgend einem Wege mit Nothwendigkeit zur Schlussvorstellung eines Grenzpunktes gelangen?

Sondern: Ist unabhängig vom Vorhandensein eines Denkenden ein Grenzpunct vorhanden, wenn die Strecken o, α_1 ; $o, \alpha_1\alpha_2$; ... vorhanden sind?

Diese Fassung schreibt uns offenbar einen anderen Weg

zu seiner Erledigung vor, als der zuerst versuchte. Wir dürfen nicht mehr zu Grunde legen, wie Eingangs des idealistischen Systems geschah, die Puncte, die wir in die Einheitsstrecke hineindenken können, sondern die, welche darin wirklich vorhanden sind.

So erhebt sich vor uns zunächst die Frage über die Anzahl Theilpuncte, die auf der Einheitsstrecke unterschieden werden müssen. Wir können beliebig viele uns vorstellen, aber wie viele müssen als an sich unterschieden, als getrennt angesehen werden. Wir können auch mehr physikalisch fragen:

Wie viel kleinere Strecken als eine gegebene sind vorhanden, oder möglich, d. i., wenn nicht vorhanden, nur zufällig nicht vorhanden.

Um auf diese Frage eine befriedigende Antwort zu ermöglichen, will ich eine begriffliche Unterscheidung von weitgreifendstem Belang vorausschicken.

23. Ueber die Begriffe unbegrenzt und unendlich.

Die Menge von Theilpuncten der Einheitsstrecke, oder von Theilstrecken, in welche die Einheit zerfällt, wird man entweder als unbegrenzt oder als unendlich bezeichnen. Sobald wir den Sinn dieser beiden Ausdrücke richtig gestellt haben werden, wird auch mit einem Schlage die Frage nach der Anzahl der Einheitstheile und die nach dem Vorhandensein der Grenze ihre Lösung finden. Dem Freund genauen Denkens und entsprechender Ausdrucksweise wird es gewiss als eine nützliche Aufgabe erscheinen, dass dem Sinn, den Sprachgebrauch und Wissenschaft in jene beiden Worte gelegt, nachgegangen und deren Bedeutung wohl abgegrenzt werde.

Ein Beispiel wird uns die Erklärung jener Ausdrücke erleichtern. Fragen wir nach der Menge der Himmelskörper im Weltraume. Wenn wir den Sternenhimmel mit blossem Auge betrachten, fallen uns zunächst einige hellere Sterne auf, wie bei den Theilpuncten der Einheitsstrecke wir zuerst an die rationalen Brüche denken. Genaueres, insbesondere telescopisches Beobachten entdeckt nach Maassgabe der Lichtstärke und Vergrösserung, die zu Gebote steht, überall, wo sich gleichförmiges Dunkel zu dehnen schien, dichtere und immer dichtere Sternmassen. So erhalten wir den Eindruck, als ob für die Sternzahl eine Grenze nicht vorhanden sei. Somit werden wir sagen: die Himmelskörper erscheinen uns in unbegrenzter Anzahl. Auf die Frage aber, welches denn ihre Menge sei, würde »unbegrenzt« sicherlich eine unbefriedigende Antwort sein, weil man dabei immer an den Abzählenden denkt, der mit seinem Geschäft nicht zu Ende gelangt, entweder, weil des Abzuzählenden kein Ende ist, oder weil er das vorhandene Ende nicht zu erreichen vermag.

Mit dem Ausdruck unendlich verbinden wohl die meisten gebildeten Deutschen den Begriff, dass eine so bezeichnete Ausdehnung oder Menge wirklich, unabhängig vom Vorhandensein denkender Wesen, alles überragt, was durch feste Maasse messbar oder abschätzbar ist. Man sagt, der Raum ist unendlich, und wenn man ihn überallhin mit Himmelskörpern besetzt sich vorstellt, so wird man auch sagen, die Anzahl der Himmelskörper ist unendlich. Die Richtigkeit dieses Satzes mag bestritten werden können, gegen den Ausdruck wird aber Niemand etwas einzuwenden haben.

Der Ausdruck: ich stelle mir den Raum unbegrenzt vor, ist unanfechtbar; uneigentlich wäre es aber zu sagen: ich stelle ihn mir unendlich vor, da man das Unendliche, welches

ausserhalb des Rahmens jeglicher Vorstellung liegt, sich eben nicht vorstellen kann. Man würde sagen müssen: Ich glaube, dass er unendlich ist.

Dies Alles wohl erwogen, kann die Beziehung des Unbegrenzten zum Unendlichen zusammengefasst werden, wie folgt:

Unbegrenzt gross nennen wir, was zwar endlich ist, jedoch nicht durch Vielfache fester Maasse überragbar, weil wir es uns im Wachsen, im Enteilen aus jeder Grössensphäre begriffen denken. Sobald wir ein noch so grosses Maass uns vorstellen, denken wir das Unbegrenztgrosse schon darüber hinaus. Lässt der begleitende Gedanke das unbegrenzt Grosse frei, verzichtet er darauf, seinem Bedürfniss nach Vorstellung zu genügen, so wird aus dem Unbegrenzten der Begriff dessen, was über alle Maassen gross ist, und was man sich nicht mehr vorstellen kann, das Unendliche. Es ist von grösster Wichtigkeit, fest zu halten, dass das Unbegrenzte stets endlich ist, und dass unendlich genannt wird, was in der Richtung des als unbegrenzt Gedachten auf das Endliche folgt, und daher selbst nicht endlich ist.

Die Frage, welches die Anzahl der Theilpuncte auf der Einheitsstrecke sei, ist hiermit schon beantwortet: In der Vorstellung ist sie unbegrenzt gross, also in der Wirklichkeit unendlich gross.

24. Das Unendlichkleine und seine Haupteigenschaften.

Der Satz, dass die Anzahl der Theilpuncte auf der Einheitsstrecke eine unendlich grosse sei, erzeugt mit logischer Nothwendigkeit den Glauben an das Unendlichkleine.

Denn halten wir fest, was wir oben als correcten Grössenbegriff hinstellten, dass Puncte auf der Länge nicht ohne Abstand aufeinander folgen, also nicht aneinander stossen können, sondern immer durch Strecken getrennt sind, dass also blosse Puncte nie eine Strecke bilden können, so sind auch die unendlich vielen Puncte durch unendlich viele Strecken getrennt, und von diesen Strecken kann keine endlich, d. i. in endlicher Zahl in der Einheitsstrecke enthalten sein, weil bei der Willkürlichkeit der Längeneinheit jede noch so kleine Strecke die nämliche Beschaffenheit, wie die Längeneinheit haben muss, so dass auf ihr wieder unendlich viel Theilpuncte vorhanden sein müssten.

Es ergiebt sich also, dass die Einheitsstrecke in unendlich viele Theilstrecken zerfällt, von denen keine endlich ist. Also existirt das Unendlichkleine wirklich.

Gehen wir jetzt auf die Eigenschaften dieser neuen Grössenart näher ein. Die Haupteigenschaft des Unendlichkleinen ist:

Eine endliche Anzahl unendlich kleiner Strecken aneinandergefügt bildet keine endliche Strecke, sondern wieder eine unendlich kleine Strecke.

Zwar kann man sich ebenso wenig, wie dies beim Endlichen möglich ist, eine bestimmte Vorstellung vom Umfang des Unendlichkleinen bilden. Es lässt sich weder für das Endliche, noch für das Unendlichkleine eine obere Grenze angeben. Aber soviel ist gewiss: wie gross man eine endliche Strecke sich auch denken mag: eine endliche Anzahl solcher Strecken aneinander gereiht liefert stets wieder eine endliche Strecke. Dieselbe Eigenschaft kommt gemäss seiner

Entstehung auch dem Unendlichkleinen zu. Denn lieferte eine endliche Anzahl dem Umfang des Unendlichkleinen angehöriger Strecken eine endliche Strecke, so könnten sie nicht unendlich klein sein, weil hierfür erforderlich ist, dass ihrer eine unendliche Anzahl auf eine endliche Strecke geht, woraus der Satz folgt.

Nicht mühelos siegt der Glauben an das Unendlichkleine. Doch wenn man den Gedanken kühn und frei ergreift, nicht bänglich mit schwankenden Mittelanschauungen den Schwierigkeiten zu entgehen sucht, sondern die Eigenschaften der neuen Grössenart, wie die logische Ideenfolge sie mit zwingender Nothwendigkeit ergab, hinnimmt als etwas, an dem eben Nichts zu ändern und wegzudeuten ist: so wird das anfängliche Misstrauen bald der wohlthuenden Sicherheit weichen, mit der man nun in den noch so vielfach dunkeln und streitigen Grundlagen der exacten Wissenschaften überall sich zurechtfindet und nach festen Principien Stellung zu nehmen vermag.

Am bedenklichsten wird dem, welchem das Unendlichkleine in der hier entwickelten Auffassung neu ist, die durch sie bedingte Erweiterung des Gleichheitsbegriffs erscheinen. Gleich nenne ich nämlich zwei endliche Strecken, sobald zwischen ihnen kein endlicher Unterschied besteht. Dies hindert jedoch nicht, und das ist die gemeinte Schwierigkeit, dass sie um Unendlichkleines von einander abweichend gedacht werden können. Falls man aber an dieser Ausdehnung des Gleichheitsbegriffs ernstlich Anstoss nimmt, hat man in den logischen Denkvorgang, der zu dem Unendlichkleinen führt, noch kein rechtes Einsehen. Dieser Begriff »gleich« widerstreitet allerdings der gewöhnlichen Auffassung,

nach welcher der Unterschied die reine Null sein soll, und spottet aller Vorstellung. Aber das eigentliche Wesen des Unendlichen ist ja eben, dass es ausserhalb unserer Vorstellungen liegt und liegen soll, und daher können wir auch nicht verlangen, dass es nun, bei Gelegenheit einer seiner Eigenschaften, die uns sonderbar dünken mag, plötzlich zur Vorstellung werde. Wir schliessen also:

Zwei endliche Grössen, deren Unterschied unendlich klein ist, sind einander gleich.

Seiner Wichtigkeit wegen werde ich von diesem Satz noch zeigen, dass er dem Begriff von der mathematischen Grösse, wie er in der Einleitung (Art. 16) angegeben wurde, nicht widerspricht.

Wenn zwei Grössen derselben Art ungleich sind, so ist ihr Unterschied eine mathematische Grösse derselben Art (II. Eigenschaft). Das Unendlichkleine ist aber keine mathematische Grösse derselben Art. Denn wäre es dies, so könnte man wegen der III. Eigenschaft durch eine Anzahl, d. i. ein endliches Vielfache des unendlich kleinen Unterschiedes jede mathematische Grösse übertreffen, gegen den Begriff des Unendlichkleinen. Also findet zwischen beiden Grössen kein Unterschied derselben Art statt, mithin können sie nicht ungleich sein, d. i. sie sind gleich nach I., weil mathematische Grössen entweder gleich oder ungleich sind. Wir geben dem Satze noch die Form:

Eine endliche Grösse ändert sich nicht, wenn ihr Unendlichkleines hinzugefügt oder hinweggenommen wird.

Nachdem diese Beziehungen zwischen dem Endlichen und dem Unendlichkleinen festgesetzt sind, fragen wir weiter: Wie hat man das Unendlichkleine sich zu denken? Denn

mag auch sein Verhalten zum Endlichen unvorstellbar sein, so kann das Unendlichkleine doch an sich, indem man von jenem Verhalten absieht, Vorstellungen entsprechen. Natürlich hat man es so sich vorzustellen, wie es vor unseren Augen entstanden ist: nämlich, sofern wir die Länge als Vertreterin der Grösse beibehalten, als Theilstrecke, also gleich dem Endlichen, als Strecke.

Wir dehnen sodann folgerichtig Alles, was wir über Theilung und Verbindung von endlichen Strecken wissen, auf die unendlichkleinen Längenabmessungen aus, da Nichts in unserem bisherigen Gedankengang eine von der endlichen abweichende Beschaffenheit der unendlichkleinen Längen anzunehmen zwingt. Daher:

Das Unendlichkleine ist eine mathematische Grösse und hat mit dem Endlichen dessen sämmtliche Eigenschaften gemein.

Sobald man einmal das Unendlichkleine neben dem Endlichen in sein dem Wirklichen entsprechendes Begriffsgebiet aufgenommen hat, erweist es sich als weitschauender Ausgangspunct neuer Forschungsrichtungen.

Es liegt z. B. am Wege, durch dieselben Schlüsse Unendlichkleines in Bezug auf Unendlichkleines zu folgern und so fortzufahren. Auf diese Weise entsteht eine Reihe von Grössenarten, deren folgweise Beziehung immer darin besteht, dass eine endliche Anzahl Grössen der einen Art nie eine Grösse der vorhergehenden Arten liefert.

Wenn innerhalb ein und derselben dieser Grössenarten die Eigenschaften der gewöhnlichen mathematischen Grössen, mithin dieselben Rechnungsarten wie im Endlichen gelten, so ist die Vergleichung der verschiedenen Grössenarten mitein-

ander Gegenstand des sogenannten Infinitärcalküls. Dieser Calcül rechnet mit den Beziehungen des Unendlichgrossen oder Unendlichkleinen von Art zu Art, und diese Arten zeigen Verbindungen miteinander, die nicht unter den gemeinen Grössenbegriff fallen. Die Uebergänge einer Art in die andere weisen z. B. nicht die Continuität der Veränderung der mathematischen Grössen auf, wenn sich auch keine sprungweisen Aenderungen ergeben; kurz, wir treten hier gleichsam aus der Richtung der Grössenlehre hinaus und in eine neue Richtung ein, wo nicht die Beziehungen der Grössen einer Art unter sich, sondern die Beziehungen der durch das Unendliche von einander geschiedenen Grössenarten der Forschung unterworfen werden.

In der gewöhnlichen Analysis unterscheidet man Ordnungen unendlichklein genannter Grössen, indem man darunter deren ganze Potenzen versteht. Es haben die gebrochenen Potenzen dasselbe Recht als Ordnungen zu gelten. Die verschiedenen möglichen Arten des Unendlichkleinen bilden aber, wie der Infinitärcalcül lehrt, eine Stufenfolge, welche viel dichter zu sein scheint, als die der Zahlen, die ja schon durch die sämmtlichen Potenzen der unendlich werdenden Grösse erschöpft wären. Auch in Bezug auf die Annäherung an irgendwelchen einzelnen Werth hat die Stufenfolge der Unendlichkeitsordnungen andere Eigenschaften wie die lineäre Grössenfolge.

25. Der Grenzbegriff und die Zahlen.

Wie wir die Zahlen durch Längen, so können wir umgekehrt die Theilstrecken der Einheit durch Zahlen ersetzen.

Zunächst ist, sobald man durch das Unendlichkleine den Grössenbegriff ergänzt hat, auch das Vorhandensein des Grenz-

punctes $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ ausser Zweifel gesetzt. Jeder der Eingangs gegebenen Beweise gewinnt nun volle Strenge. Betrachten wir z. B. den zweiten, so gehen die gedeckten Puncte bis zu einem Punct N. Die nicht gedeckten beginnen mit einem Punct N'; aber die Strecke NN' ist jetzt unendlich klein, während sie oben als unbegrenzt klein angesehen werden musste. Nehmen wir also den Punct N als den Grenzpunct, der die Länge L begrenzt, an, so muss er in der That die Bedingung erfüllen, dass $L - o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ mit wachsenden p unter jede Grenze sinkt. Denn der Unterschied kann nicht grösser bleiben wie NN'. Da diese Strecke aber unendlich klein ist, so fügt sie zu $\overline{oN} = L$ nichts hinzu. Q. E. D.

Umgekehrt entspricht aber jeder Strecke L eine Zahl $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots$ Wenn L nicht ein Decimaltheil der Einheitsstrecke ist, so ist α_1 das grösste Vielfache des Zehntel der Einheitsstrecke, das kleiner als L ist, α_2 das grösste Vielfache des Hunderttheils der Einheitsstrecke, das kleiner als $L - o, \alpha_1$ ist, u. s. f. So entsteht ein endloser Decimalbruch, dessen Grenzpunct L ist.

Es sind also die Theilpuncte der Einheitsstrecke vollkommen gleichwerthig mit den Zahlen, darunter endliche und endlose Decimalbrüche verstanden. Jedem Theilpunct entspricht eine Zahl, jeder Zahl ein Decimalbruch. So dass wir behaupten:

Die Anzahl sämmtlicher Zahlen ist unendlich.

Nun schliessen wir weiter. Hier und an einer früheren Stelle, wo von der Anzahl der Himmelskörper die Rede war, tritt eine unendlichgrosse Anzahl auf. Die Anzahlen werden gemessen durch die ganzen Zahlen: also giebt es unendlich viele ganze Zahlen. Man wird freilich im

ersten Augenblick geneigter sein, die Menge der ganzen Zahlen nur für unbegrenzt gross zu halten, weil man an den Zählenden denkt; aber man muss auch hier den Zählenden von der Zahl trennen. Bei Gauss liest man einigemal: *numerus infinite magnus*, und seine Ausdrücke pflegen wohlerwogen zu sein.

Denkt man sich die ganze Zahl nicht, wie sie dekadisch geschrieben wird, sondern unter dem Bilde:

$$\beta_0 + \beta_1 10 + \beta_2 10^2 + \ldots \quad , \beta_p = 0, 1, 2, .. 9,$$

einer nach steigenden Potenzen von 10 geordneten Reihe, so ist die unendliche Reihe das Bild der unendlichen ganzen Zahl. Hierbei fällt auf, dass die letzten Glieder nach rechts, die man aus dem Auge verliert, wenn die Zahl aus dem Bereich der Vorstellung rückt, gerade den grössten Einfluss auf ihren Werth haben. Dieser Umstand hat ein eigenthümliches Interesse. Wenn man nämlich, wie wir es thaten, mit dem Begriff des Unendlichgrossen folgerichtig auch den des Unendlichkleinen in sein Begriffssystem aufnimmt, so wird dieses numerisch als $\frac{\text{endliche Zahl}}{\text{unendliche Zahl}}$ darzustellen sein. Aus vorstehender Bildungsweise der unendlichen Zahl folgt nun, dass die besondere Beschaffenheit von Zähler und Nenner aus diesem Bruch durchaus verschwindet. Denn die Stellen im Endlichen sind ohne Einfluss im Vergleich mit den Stellen im Unendlichen, und die Stellen im Unendlichen sind der Wahrnehmung entzogen und unangebbar, so dass in der That das individuell Numerische völlig beseitigt ist, und das Unendlichkleine als eine mit dem Endlichen numerisch ganz ausser Beziehung stehende Grössenart auftritt.

Wenn ich also glaube, dass die Auffassung der Menge der ganzen Zahlen als einer unendlichen unumgänglich ist,

so giebt es der rationalen Zahlen (wir denken sie wieder zwischen Null und Eins eingeschlossen) eine unbegrenzt grosse und keine unendliche Menge. Es liegt dies eben in ihrer Definition, als reducirten Brüchen mit endlichem Zähler und Nenner. Die Beschränkung, dass die Zähler und Nenner nicht unendlich gross werden dürfen, bewirkt, dass die Anzahl der Rationalzahlen zwar beliebig gross gedacht werden kann, aber immer endlich bleibt, d. i., dass sie, wie gross man sie auch einen Augenblick lang sich denken möge, stets durch eine andere endliche Anzahl übertroffen werden kann.

Die Menge aller Zahlen ist unendlich, weil sie nicht das Vorhandensein Denkender voraussetzt, während der Inbegriff der Rationalzahlen an die denkende Person gebunden ist, was schon in dem beliebig grossen ihr gestatteten Zähler und Nenner liegt.

26. Die Null und das Unendlichkleine.

Die Eigenschaft des Unendlichkleinen, dass es das Endliche additiv nicht verändert, lässt eine in der Analysis manchmal sehr unbequeme Figur, die echte Null, welche die Abwesenheit jeder Grösse bedeutet, entbehrlich erscheinen. Wenn einer Variabeln x vorgeschrieben ist, dass sie das gesammte reelle Grössengebiet zu vertréten habe, denkt man sich darunter meistentheils auch die reine Null einbegriffen. Ich glaube aber, dass sie nicht hineingehört. In vielen Fällen wird freilich Nichts darauf ankommen, ob man die Null zulässt oder ausschliesst. Sie kann jedoch, falls man den wahren Sinn der Zeichen aus dem Auge lässt, die Bedeutung der Formeln verdunkeln, und manche Verwirrung entstand schon, weil sie bisweilen rein formal als Grösse behandelt wurde.

Die so oft vorkommende Schreibweise $\frac{1}{0}, \frac{0}{0}$ ist z. B. entschieden verwerflich, denn sie ist entweder ungenau oder widersinnig. Dem Neuling jedenfalls unbegreiflich. Soll die Null soviel wie unendlich klein sein, so ist sie ungenau; soll die Null »Nichts« bedeuten, so ist Eins durch Nichts dividirt offenbar Eins, und Nichts durch Nichts dividirt bleibt Nichts. Glücklicherweise gewinnt die für den Lernenden höchst wünschenswerthe Reinigung der Mathematik von dergleichen sinnlosen Zeichencombinationen immer mehr Freunde.

Wenn man die (positiv gedachte) Veränderliche x gegen die Null abnehmen lässt, wie dies bei Grenzbetrachtungen vorgeschrieben wird, und man denkt sich x erst alle Stufen der Grössen endlicher Abmessung, wenn man will, jede Stufe durch Unendlichkleines vermehrt oder vermindert, sodann auch alle Stufen des Unendlichkleinen aller Ordnungen durchlaufend, so hat x das positive Grössengebiet erschöpft. Denkt man sich sodann diese Werthe negativ genommen hinzu, so hat x sein gesammtes reelles Grössengebiet erschöpft. Die echte Null gehört nicht dazu, sie ist eben keine Grösse.

Wenn man übrigens der Sache psychologisch auf den Grund geht, so erscheint es gleichsam als ein Gewaltact der Phantasie, eine unbestimmte oder nach Willkühr veränderliche mathematische Grösse zu vernichten, und sie darauf wieder zu erschaffen, wie eine erloschene Flamme wieder angezündet wird. Eine veränderliche Grösse bedeutet eine Folge gleichartiger, nur in ihren Abmessungen verschiedener Vorstellungen, und das Vernichten des veränderlich Gedachten ist offenbar eine durch besonderen Willensact neu in den Begriff der veränderlichen Grösse hineingetragene Vorstellung.

Der Idealist bezweifelt mithin nicht, dass die ächte Null der Analysis ganz entbehrlich sein würde. Doch soll dies hier nicht eingehender erörtert werden. Man hätte z. B. nicht zu sagen: x^2-1 wird Null für $x = 1$, sondern wird unendlich klein für $x = 1$. Man würde sagen e^x wird 1, wenn x unendlich klein wird; $\frac{1}{x}$ wird positiv unendlich, wenn x positiv unendlich klein wird, negativ unendlich, wenn x negativ unendlich klein wird; und $\frac{1}{x-1}$ ist nur für um Endliches, oder unendlich wenig von 1 verschiedene Werthe von x angebbar. Endlich kann auch jede Gleichung $U = 0$ so aufgefasst werden, dass U ein Unendlichkleines höherer Ordnung sei als die in $U=0$ auftretenden Summanden oder Subtrahenden, die durch Addition oder Subtraction von Ihresgleichen an beiden Seiten von $U=0$ auf die rechte Seite gebracht werden können.

Vorstehende Ausdrücke sind übrigens sämmtlich nicht neu, sondern oft gebraucht worden, vielleicht aber nicht immer mit vollem Bewusstsein ihrer Tragweite.

27. Noch Einiges über die idealistische Terminologie.

Wir führen die idealistische Ausdrucksweise noch bei den zwei bekanntesten Grenzausdrücken durch.

1. Unserer Auffassung entspricht es zu sagen, das Werthzeichen $(1+\frac{1}{x})^x$ geht über, wenn x unendlich gross wird, in die Irrationale e. Desgleichen geht, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, wenn x unendlich klein wird, über in e. Beides wörtlich zu verstehen. Sinnlos wäre es zu sagen, dass $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ in e übergeht, wenn

x Null wird, denn für $x=0$ ist $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ ein bedeutungsleeres Zeichen. Bezeichnen wir mit ε ein Unendlichkleines irgend welcher Ordnung und Grösse (innerhalb seiner Ordnung), so ist in aller Strenge:

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e.$$

2. Wenn mit $\triangle y$ der Zuwachs der Function $y = f(x)$ bezeichnet wird, den der Zuwachs $\triangle x$ ihres Argumentes x zur Folge hat, und $f'(x)$ ist der nach bekanntem Verfahren darzustellende und darstellbar vorausgesetzte Differentialquotient von $f(x)$, so dass in $\frac{\triangle y}{\triangle x} = f(x) + \delta$ die Grösse δ mit $\triangle x$ unter jede Grenze sinkt: dann sagen wir, dass δ unendlich klein wird, wenn $\triangle x$ unendlichklein wird und schreiben, unter dx, dy und ε unendlich kleine Grössen verstanden,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varepsilon,$$

eine völlig strenge Gleichung. Nicht minder streng ist diese

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

nach dem Satz vom additiven Unendlichkleinen. Ebenso ist mit voller Strenge

$$dy = f'(x)dx$$

und diese Gleichung ist nach dem Obigen gleichbedeutend mit $dy - f'(x)dx =$ einem Unendlichkleinen höherer Ordnung als dx.

Diese Beispiele werden genügen, um die idealistische Auffassungs- und Ausdrucksweise zu kennzeichnen, und in den Stand zu setzen, sich ihrer in allen vorkommenden Fällen correct zu bedienen.

28. Ueber die verschiedenen Auffassungen des Unendlichkleinen in der Mathematik.

Das Unendlichkleine ist in der Mathematik seit Leibnitz, der es *quantitas infinitesima* nannte, dem Wortlaut nach eingebürgert. Jedoch, ebenso wenig wie Leibnitz selbst über den Sinn des Unendlichkleinen zu einer festen Ansicht gelangte, hat seit Erscheinen seiner berufenen sechs und einhalb Seiten in den *Acta eruditorum* vom Jahre 1684 *) die allerdings wesentlich den Methoden und Ergebnissen der Differentialrechnung zugewendete Arbeit der Mathematiker den Begriff des Differentials geklärt, vielmehr machen seine Schwankungen unserer Wissenschaft, welche gewohnt ist, anderen als Muster vorgehalten zu werden, wenig Ehre.

Den Einen namentlich Mathematikern des vorigen Jahrhunderts ist es mit dem Unendlichkleinen völlig Ernst. Sie wollen darunter eine ausserhalb des gemeinen Grössengebiets befindliche Grössenart verstanden wissen, die wirklichen Daseins sich erfreue. Es war indessen mehr eine Ahnung als eine logische Herleitung, wie die oben versuchte, aus welcher diese Ansicht entsprang.

Spätere Analysten, die gleichsam eine Mittelpartei bilden, sehen das Unendlichkleine allerdings auch nicht als gemeine Grösse an, sondern als eine in Fluss, in der Bewegung gegen

*) pag. 467—473. Bei der Einführung der Differentiale in den ersten Zeilen dieses heute noch schwer verständlichen Aufsatzes heisst es: *Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx* ..., so dass, auch nach der Figur zu schliessen, hier zuerst den später gebräuchlichen differentialischen Zuwächsen proportionale Linien gemeint zu sein scheinen. Man lese auch die betreffenden einleitenden Bemerkungen Hrn. C. Gerhardt's, Leibn. ed. Pertz, III. Folge, V. Bd. pag. 215.

die Null, im Verschwinden begriffene Grösse, also etwa als das, was wir unbegrenzt klein nannten.

Eine dritte Vorstellungsweise sodann verwirft das Unendlichkleine gänzlich, erklärt es für einen uneigentlichen Ausdruck statt beliebig klein, dieses so verstanden, dass die beliebig kleine Grösse immer hinreichend klein gedacht werden kann, um den Formeln den erforderlichen Grad von Genauigkeit zu ertheilen. Die Formeln zwischen so beschaffenen unendlichkleinen Grössen sind alsdann ungenau, etwa wie die der mathematischen Physik, nur mit dem Unterschied, dass sie eben beliebig wenig ungenau sind. Doch vermisse ich in unserer Literatur eine consequente Durchführung dieser Idee, welche auf ihre Weise die Bedenken gegen die Rechnung mit Differentialen gänzlich zerstreute.

Endlich hat es auch nicht an Mathematikern gefehlt, die das hypothetische Unendlichkleine nicht einmal als literalen Ausdruck in ihre Formeln aufnahmen, und zwar sind unter ihnen keine geringeren als Newton und Lagrange zu nennen. Lagrange's Bemühungen haben jedoch nur gedient, den Sieg des Differentials zu verherrlichen, welches alsbald wieder durch alle Poren in die Wissenschaft eindrang, so unwiderstehlich, dass in der jetzt erscheinenden Ausgabe seiner Werke seine Formeln in die Schreibweise mit Differentialen umgeschrieben sind.

Der Idealist bekennt sich zu der ersten dieser vier Auffassungen, jedoch, wie gesagt, nicht auf Grund von Ahnungen, sondern von Schlüssen, die er für bindend hält.

So bereit die Mehrzahl der Gebildeten sein wird in Raum und Zeit über das Unbegrenztgrosse hinaus das Unendliche zuzugeben, so schwer werden, wie bereits bemerkt, die Meisten

sich entschliessen an das Unendlichkleine zu glauben, obschon es dasselbe Daseinsrecht besitzt wie das Unendlichgrosse, und daraus sogar mit logischer Nothwendigkeit erschlossen werden muss.

Man entfernt sich eben nicht gern und nicht leicht von den durch die gesammte geistige Erziehung gebahnten Heerstrassen des Vorstellungsgebietes. Wäre dem Menschen der Anblick des gestirnten Himmels versagt; würde das Geschlecht troglodytisch in geschlossenen Räumen entstanden sein und sich entwickelt haben; würden seine Gelehrten statt teleskopisch die Fernen des Weltalls zu durchschweifen, lediglich mit dem Mikroscop die kleinsten Formbestandtheile aufzusuchen und so mit ihren Gedanken in der Richtung des unmessbar Kleinen ins Grenzenlose vorzudringen gewohnt sein: wer möchte zweifeln, dass dann das Unendlichkleine in unserem Begriffssystem dieselbe Stelle einnehmen würde, wie jetzt das Unendlichgrosse? Hat übrigens nicht in der Mechanik das Streben bis auf die kleinsten Elemente des Wirkenden zurückzugehen, schon längst in der Wissenschaft das Atom, das verkörperte Unendlichkleine eingeführt? Und gehen wie immer geschickte Versuche es der Physik entbehrlich zu machen nicht zuversichtlich demselben Schicksal entgegen, wie der Kampf Lagrange's gegen das Differential?

29. Kurzer Rückblick auf das idealistische System.

Um schliesslich meine mathematischen Grundvorstellungen kurz zusammenzufassen, so stellen sie diese Grössenfolge fest:

Unendlich klein, unbegrenzt klein, endlich, unbegrenzt gross, unendlich gross. Die Null gehört nicht dazu, sie ist eben keine Grösse.

Hievon sind wirkliche und unabhängig vom Vorhandensein

denkender Wesen existirende Grössen: unendlich klein, endlich, unendlich gross. Die Vorstellung unbegrenzt ist an das Vorhandensein eines Denkenden gebunden, ist keine Vorstellung einer festen, ruhenden Grösse, sondern enthält die Idee einer Bewegung über alle Schranken hinaus, bei der unser Gedanke die wachsende oder abnehmende Grösse unzertrennlich begleitet, die also stets eine endliche bleibt.

Das idealistische Denken setzt eine Welt voraus, die nicht allein unseren Vorstellungen, ja unseren abgezogensten Anschauungen und Begriffen irgendwie zugeordnet ist, sondern die, über diese Vorstellungen hinaus, einen wirklichen, und wenn auch menschlich unvorstellbaren, uns jedoch tiefbewussten Inhalt besitzt. So ist die allgemein menschliche Idee des Weltalls zunächst die eines Raumes, der zwar als solcher Dimensionen hat, aber von unvorstellbarer Ausdehnung. Das idealistische System braucht sodann ebensowohl für die thatsächlichen Dimensionen des Weltalls, wie für die Anzahl der Theile der mathematischen Grösse ein Wort, das nicht etwa besagt, dass *wir* diese Dimensionen nicht abmessen, diese Zahl nicht zählen können, sondern dass sie vorhanden, jedoch mit endlichem Maasse nicht messbar sind. Das Wort lautet: *unendlich*. Da der Theile der endlichen Grösse unendlich viele sein müssen, so müssen sie einzeln unendlich klein sein.

Daraus ergiebt sich erstens, *dass jeder endlose Decimalbruch* $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ *eine mathematische Grösse als feste Grenze hat*, zweitens *dass es unendlich viele Zahlengrössen* $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ *giebt*.

Das Unendlichkleine betreffend, so lässt es unendlich mannigfaltige Ordnungen zu. Innerhalb einer Ordnung verhält es sich wie eine gewöhnliche mathematische Grösse, und

ein Unendlichkleines höherer Ordnung kann ein solches niederer Ordnung additif nicht verändern. Das Endliche entspricht der Ordnung Null.

Die grundlegende Anschauungsweise des idealistischen Systems ist also die wirkliche Existenz nicht allein des Vorgestellten, sondern der aus den Vorstellungen unwillkürlich folgenden Anschauungen. Sobald wir diese als vorhanden zugeben, ist die Frage gestattet nach der Beschaffenheit dessen, was unseren Wahrnehmungen sich entzieht, und was wir wie die thatsächlichen Abmessungen des Weltalls doch nicht umhin können, als vorhanden anzusehen, und diese Frage kann nicht anders beantwortet werden als von uns geschehen.

Empiristische Critik des idealistischen Systems.

EMPIRIST.

30. Ueber endlose Decimalbrüche die nach einem Gesetz und solche die ohne Gesetz fortschreiten.

Meine Auffassungsweise von den Grundbegriffen der Mathematik unterscheidet sich von der des Idealisten dadurch, dass sie es sich versagt, die Grenzen des natürlichen Vorstellungsgebiets zu überschreiten. Ich glaube, wir sind nicht berechtigt, Dinge anzunehmen und in den mathematischen Denkvorgang zu verflechten, von denen wir keine Vorstellung haben und haben können. Aus diesem Grunde werde ich gewissen Hauptvoraussetzungen des idealistischen Systems entgegentreten, möchte aber zunächst den Idealisten nöthigen, seine Ansicht über die Theile in welche die Einheitsstrecke zerfällt bis zu Consequenzen zu verfolgen, die er noch nicht zog. Zu diesem Zweck will ich vor der Hand die

Begriffe unbegrenzt und unendlich, wie sie im idealistischen System unterschieden werden, gelten lassen, und die Beschaffenheit eines endlosen Decimalbruchs in Bezug auf seine unbegrenzte Fortsetzung untersuchen.

Der Idealist schliesst auf seine Weise, dass schon die Menge der ganzen Zahlen, *a fortiori* die aller Zahlen unendlich sei. Man gelangt durch dieselbe Logik zu einem sonderbaren Ergebniss. Es handele sich um Decimalbrüche $<$, also der Form $o,\ \alpha_1\alpha_2 \cdots = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots$

Da, wenn man sie soll in's Endlose fortsetzen können, eine Vorschrift, ein Gesetz gegeben sein muss, nach welcher diese Fortsetzung auszuführen ist, so sind die unbegrenzte Reihe und deren Gesetz gewissermassen identische Begriffe. In der That ist eine unendliche Operation, ohne eine Vorschrift nach welcher sie fortgesetzt werden soll, eine *contradictio in adjecto*. Denn wenn unter unendlich verstanden wird, dass das Fortschreitende sich gleichsam von der menschlichen Begleitung losreisst und selbstständig den Weg ins Endlose fortsetzt, so muss ihm, wenn das Fortschreiten auf bestimmte Weise geschehen soll, eine feste Vorschrift mit auf den Weg gegeben sein. Es entspricht dieser Zuordnung von Reihe und Gesetz, dass auch durch die Reihe das Gesetz bestimmt ist; wennschon diese Beziehung nicht so durchsichtiger Natur ist, wie die umgekehrte. Stehen unbegrenzt viele Zahlen α von der Reihe $o, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ zur Verfügung, so kann man sich vorstellen, dass ausreichender Scharfsinn ihr Successionsgesetz stets werde ermitteln können, weil es durch die unbegrenzte Folge nothwendig bestimmt ist.

Wie können nun solche Gesetze beschaffen sein? Ein besonderes derartiges Gesetz wird irgend eine Anzahl willkür-

licher Grössen enthalten. Es kann z. B. die Zahl $Z = o,\alpha_1\alpha_2..$ aus der Vorschrift $Z = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots$ ausgerechnet werden sollen, wo die a willkürliche, die μ gegebene Zahlen bedeuten. Wenn ich mit dem Idealisten nach der Anzahl solcher Gesetze frage, so muss ich mir die Antwort: unendlich geben, denn die Form des Gesetzes ist vorgeschrieben, also vom denkenden Menschen fortan unabhängig, mithin bleibt nach der idealistischen Schlussweise schlechterdings keine andere Antwort übrig. Ist nun die in der Vorstellung unbegrenzte Anzahl der willkürlichen Grössen a thatsächlich unendlich, so folgt daraus, dass die der Grössen α es auch ist, kurzum die ganze Folge $o,\alpha_1\alpha_2..$ ist willkürlich und unterliegt in's Endlose erstreckt keinem Gesetz. Wenn einem höchsten Scharfsinn ihre Ziffern in beliebiger Anzahl zur Verfügung gestellt würden, so konnte er über deren Succession nichts festsetzen.

Es wären dies mit einem Wort keine Zahlen. Denn es ist gewiss erlaubt, dies Wort im menschlich denkenden Sinne zu gebrauchen für hinschreibbare Einheitstheile, und solche Einheitstheile, die zwar nicht in Ziffern hinschreibbar sind, aber doch durch ein hinschreibbares Successionsgesetz der Ziffern bestimmt sind.

Die ewig gesetzlosen Folgen $o,\alpha_1\alpha_2\ldots$ sind hiernach keine Zahlen. Entsprächen sie Grössen? Im idealistischen Sinne ohne Zweifel. Der Idealist denkt sie sich fortgesetzt, bis die ferneren Zuwächse $\frac{\alpha_\infty}{10^\infty}$, etc. unendlich klein sind. Diese ändern nach seinen Definitionen an dem Ergebniss der vorhergehenden Gliederaddition nichts, mithin entspricht dem endlosen wenn auch gesetzlosen Decimalbruch ein Stück der Einheit. Er muss also zum Schluss gelangen dass es, die Einheit

einmal festgesetzt, unzählige Bruchtheile der Einheit giebt, die durch Zahlen nicht darstellbar sind.

IDEALIST.

Auf dergleichen Folgerungen aus meinen Grundannahmen bin ich vorbereitet, sie erschrecken mich keineswegs. Der Empirist schliesst ganz richtig, dass ich Zahlenfolgen zugeben muss, die nie ein Gesetz für ihre Fortsetzung liefern können, und doch in's Unendliche fortgehen. Gewiss ist dies unvorstellbar, doch nicht unvorstellbarer wie »unendlich« und »ewig«. Die nicht hinschreibbaren Zahlen sind eine ebenso unumgängliche Folgerung aus der allgemein menschlichen Auffassung vom Wesen der Dinge wie die Unendlichkeit des Raums und die Ewigkeit der Zeit.

Die Beschränkung der Anzahl möglicher Decimalbrüche durch die Gesetze, welche unendliche Operationen als solche erfordern, ist offenbar von vornhinein in dem Begriff aller unendlichen Folgen von irgend welchen hintereinandergeschriebenen Zahlen der Folge, 0, 1, 2,..9 nicht enthalten, sondern nachträglich durch Speculation hineingetragen. Geht man von der Grössenvorstellung aus, so sind alle Längen, die kleiner sind, als die Längeneinheit in der Vorstellung gleichartig. Man denke sich die Einheit und eine kleinere Länge vorgelegt. Wenn man durch Messungen das Verhältniss der kleineren Länge zur Einheit bestimmt, so wird man eine Decimalstelle nach der anderen feststellen, und mit diesem Geschäft, freilich unter Voraussetzung genügender Instrumente, fortfahren können, so lange es beliebt, also einen unbegrenzten Decimalbruch empirisch entwickeln. Nichts jedoch in diesem Entstehungsvorgang eines Decimalbruchs bedingt ein Gesetz, welches seine Ziffernfolge beherrscht. Durch das strenge

Verhältniss der Längen zu einander ist der endlose Decimalbruch durchweg völlig bestimmt, ohne dass eine Regel zu existiren braucht, um z. B. wenn die ersten n Ziffern gegeben sind, jede fernere danach berechnen zu können.

Man könnte auch an folgende Entstehungsweise einer endlosen und gesetzlosen Zahl denken: Jede Stelle wird einfach ausgewürfelt. Da doch die Annahme gemacht werden darf, dass dies Würfeln von Ewigkeit her oder in alle Ewigkeit stattfindet, so wäre hiermit eine gesetzlose Zahl in der Idee hergestellt. Indessen die Naturbetrachtung liefert uns bessere Beispiele.

Unstreitig sind viele Constanten der Natur durch den Zustand des Weltraums von Ewigkeit her bestimmt. Die Temperatur des Raums, seine optischen Constanten, vor allem sein Potential sind es gewiss. Vom Potential und ähnlichen Grössen kann ausgesagt werden, dass sie durch die Gesammtheit der Massen im Raum bestimmt sind, unter der freilich sehr fraglichen Voraussetzung, dass die von einem Punkt ausgeübten Kräfte überall gleichzeitig zur Wirkung kommen. Die übrigen Constanten des Raums werden aber erzeugt durch die Einflüsse Alles dessen was im Raume ist und war. Z. B. ist die Temperatur des Raums ein Ergebniss aller Zustände der Raumunendlichkeit und der Zeitewigkeit. Denken wir uns die Materie endlich, nach allen Richtungen irgendwo im Raum aufhörend, und ihren Zustand zu irgend einer Zeit gegeben, so muss die Zahlendarstellung jener Naturconstanten auf ein Gesetz führen. Denken wir uns den Stoff aber unendlich, so hängt eine Constante wie die Raumtemperatur von Einwirkungen ab, die bei keiner Decimalstelle nothwendig aufhören müssen. Würde ihre Ziffernfolge nach einem Bildungsgesetz fortschreiten, so enthielte dies Gesetz die Ge-

schichte und das Bild der Zeitewigkeit und der Raumunendlichkeit. Wie man sieht, würden schon dergleichen physikalische Erwägungen die Existenz gesetzloser Irrationalzahlen nahe legen. Hinsichtlich der Grenzen solcher Zahlen gelten übrigens meine Betrachtungen unverändert, da ich bei meinem Existenzbeweis der Grenze von einem etwaigen Gesetz keinen Gebrauch machte. Ich möchte im Hinblick auf die obigen Beispiele die gesetzlosen Irrationalen empirische nennen, zur Unterscheidung der nach einem Gesetz fortschreitenden, die analytische heissen könnten.

EMPIRIST.

Die Triftigkeit dieser Ausführungen vom idealistischen Standpunkt aus würdige ich vollkommen. Meine Absicht war eben nur, an einem unter zahlreichen Beispielen zu zeigen, wie die idealistische Auffassungsweise schon in den ersten Elementen allerwärts die Schranken des menschlich Denkbaren überspringt, statt die Principien der Wissenschaft zusammenzudrängen und zu vereinfachen. Dem Idealisten erscheint solche Exuberanz des Denkens vielleicht als Vorzug, während sie mich beunruhigen würde. Ich könnte mich in einer Wissenschaft, deren Triebe so vielfach in's Ungeheure, Unfassbare ragen, bei aller Strenge ihrer Schlüsse nicht heimisch fühlen.

30. Die idealistische Grundvoraussetzung wird aufgedeckt.

Nunmehr wende ich mich zu den Voraussetzungen der idealistischen Lehre.

Ihr liegt eine vermeintliche Vorstellung zu Grunde, an der man achtlos vorbeizugehen pflegt, obgleich sie als der eigentliche Ursprung aller Dunkelheiten und Unverständlichkeiten in den Principien nicht allein der Mathematik, sondern

der strengen Naturwissenschaften überhaupt anzusehen ist. Jene Vorstellung ist eben so unwirklich, wie die des daraus sich ergebenden Unendlichkleinen. Diese vom Idealisten kaum betonte Ausgangsvoraussetzung des Idealisten ist die Existenz des genauen Maasses. Sie ist die Grundlage aller seiner Betrachtungen und Schlüsse. Aus der Vorstellung der genauen Länge folgert er das Unendlichkleine, mit dem er seinen Grenzbeweis führt. Aus ihr fliesst seine infinitäre Skala der Grössenarten. Auf die nämliche Vorstellung beruft er sich um die Entstehung in's Unendliche fortlaufender gesetzloser Decimalbrüche denkbar zu machen. Endlich legt er eine genaue Temperatur, die des Weltraums, zu Grunde, um das thatsächliche Vorhandensein solcher »empirischen Zahlen« wahrscheinlich zu machen. Sehen wir von der Temperatur ab, die eine sehr zusammengesetzte Vorstellung ist, so knüpft also der Idealist seine wichtigsten Folgerungen an den Begriff der genauen Länge und an ihre Gleichartigkeit in ihren beliebig klein gedachten Abschnitten, woraus dann das plötzliche Abbrechen einer Linie, ihre unendliche Theilbarkeit, und alles Weitere sich ergiebt.

Hier beim genauen Maass trennen sich unsere Wege. Ich halte es für unwirklich, undenkbar, kurz für ein inhaltleeres Wort. Um aber falschen Auffassungen dieser Ansicht vorzubeugen, will ich den Punkt, auf den es ankommt, sogleich herausheben. Ich läugne nicht die Wahrnehmung und Vorstellung des Genauen, sondern den wissenschaftlichen Begriff genauer geometrischer Grössen. Wir haben ihn nicht, und können ihn nicht haben.

Unsere geometrischen Wahrnehmungen und Vorstellungen sind nicht ungenau, falls unser Or-

gan seine Schuldigkeit thut. Mit jugendlichen Augen sehen wir das ferne Schneefeld in schärfsten Umrissen vom Himmel sich abheben, und wenn wir später, der Myopie verfallen, gelegentlich eine Zeit lang des Augenglases entbehrten, so gewährt uns der erste Anblick scharf begrenzter Formen entschiedenen Genuss. Man ist von dieser Genauigkeit völlig befriedigt, weil man aus den Wahrnehmungen keine grössere kennt, mithin auch keine grössere Genauigkeit des sinnlichen Eindrucks der Trennungslinien erdenken kann. Uebrigens sind es wesentlich die Wahrnehmungen selbst oder die ganz frischen Vorstellungen, die also erst kurze Zeit im Gedächtniss gelagert haben, welche ohne Weiteres das Bild genauer Begrenzungen erzeugen. Wie alle Gedächtnissbilder, so wird auch dieses ohne Auffrischung mit der Zeit an Schärfe einbüssen. Wenn wir beim Nachdenken ohne sinnliche Hülfe genaue geometrische Gebilde mit wenigstens annähernd ursprünglicher Frische uns vorstellen wollen, so pflegt dies eben einige Anstrengung zu kosten *). Was uns aber verbleibt

*) Selbstbeobachtung verschafft mir den Eindruck, als ob ich mit zwei Vorstellungsformen arbeitete, gröberen und feineren, wie denn Aehnliches Andere auch in anderen wissenschaftlichen Gebieten an sich beobachten werden. Wenn, wie ich im Texte bemerke, es mit einiger Anstrengung verbunden ist, geometrische Gebilde mit der Schärfe ursprünglicher Wahrnehmungen sich vorzustellen, so wird die Fähigkeit, schwerlich aber die Neigung zu solcher Gedankenarbeit erhöht durch die namentlich in jüngeren Jahren wiederholte Anstrengung unsere räumlichen, besonders aber unsere mechanischen Begriffe zu reinigen und fort und fort abgezogener zu gestalten. Man trägt z. B. später Scheu vor der Zuspitzung gewisser mechanischer Abstractionen, weil ihre Fruchtlosigkeit jedesmal auf das Empfindlichste fühlbar wird. Beim alltäglichen, gewöhnlichen Denken, sind es unvollkommene Bilder von Puncten, Linien, Flächen u. s. f., welche ich in meiner Seele vorfinde, wenn ich z. B. beim Studieren eines geometrischen Aufsatzes meine Lectüre unterbreche, um die gewonnenen Vorstellungen einer Prüfung zu unterziehen. Ich habe gemeiniglich an Zeichnungen auf der Tafel oder an stereoskopische Bilder gedacht.

und nicht wie ein Bild verblassen kann, das ist der Begriff des Genauen in der sinnlichen Wahrnehmung. Er haftet an seinem Zeichen: dem Wort.

Diesen Begriff bilden wir unbewusst weiter fort, bis er zum Begriff des Idealgenauen wird. Der Vorgang dabei ist etwa folgender. Häufige Erfahrung lehrt zwar, dass scheinbar genaue Geraden, wie die entfernte Hauskante bei näherer Besichtigung als unregelmässige Gebilde sich erweisen, andere Geraden bleiben es indessen auch bei mikroskopischem Sehen. Wir besitzen genug der Beispiele von so vollkommen ausgeführten geometrischen Gebilden, von mit mechanischen Vorrichtungen hergestellten Linien, Kanten, Flächen, dass bei den einen das unbewaffnete Auge, bei den andern mikroskopisches Sehen keine Abweichung vom Genauen entdecken lässt. Somit ergiebt sich: Wir besitzen die Vorstellung des sinnlich Genauen, und weiter die Vorstellung des, vor der äussersten Empfindlichkeit unserer Prüfungsmittel stichhaltend Genauen. Hieraus nun entspringt ein Denkprocess dessen Ergebnisse nach den mannigfaltigsten Richtungen hin unser Begriffssystem beherrschen: Wo eine endlose Vorstellungsfolge keine Vorstellung zur Grenze hat, bewirkt die Analogie zahlloser Vorstellungsfolgen, die bei einer Vorstellung als Grenze anlangen, dass wir eine Grenze unwillkürlich voraussetzen, wo sie fehlt. Da sie aber keiner wirklichen Wahrnehmung entspricht, kann sie als Vorstellung auch kein gegenständliches Bild sein, sondern sie wird Wortvorstellung, und wird als solche unserem Begriffssystem als Begriff von etwas Wirklichem und Vorstellbarem eingefügt. Dies ist in wenigen Worten die Entstehungsweise dessen, was ich den allgemeinmenschlichen Idealismus nennen möchte. Es ist ein wesentlich unbewusster Vorgang, der sich nicht blos im Einzelwesen, sondern auch

im Geschlecht abspielt*). So glauben wir unbesehen an die Möglichkeit des völlig Genauen, oder richtiger, wir denken überhaupt gar nicht darüber nach. Es gehört wie viele andere ähnliche Begriffe unangefochten dem Begriffssystem des mittleren Menschen an.

31. Die Idee vom genauen Maass wird der empiristischen Critik unterzogen.

Also unbewusst sind wir Idealisten. Wissenschaftlich aber sollen wir Rechenschaft von unseren Voraussetzungen und Grundbegriffen geben können, und keinen Standpunkt unbewusst einnehmen. Unsere wissenschaftliche Aufgabe ist es daher, rückwärts die Idee des Genauen mit der Wirklichkeit zu vergleichen, wir müssen untersuchen, ob die Grenze, für die wir ein Wort in unserem Begriffssystem haben, dem Vorhandenen entspricht. So entsteht denn die Frage: Sind wir berechtigt den geometrischen Idealen Wirklichkeit zuzuerkennen? Es ist dies also die Frage nach dem Begriff des genauen Maasses, bei deren Erörterung es offenbar genügt an das genaue Längenmaass, d. i. an die geradlinige Strecke zu denken.

Am sinnlichen Bilde der begrenzten Geraden lassen drei Eindrücke sich unterscheiden. Erstens, dass sie eine Linie ist, zweitens, dass sie eine gerade Linie ist, drittens beginnt sie plötzlich und hört plötzlich auf. Die zwei ersten Bestandtheile des Bildes wollen wir jedoch in Einem untersuchen.

---

*) Hier ist nicht der Ort, den eben kurz skizzirten Denkvorgang sorgfältiger zu zergliedern und an zahlreichen Beispielen zu beleuchten. Diese Aufgabe stellt sich die unmittelbar nach der vorliegenden erscheinende pag. 12 angekündigte Schrift.

Von keinem Gebilde der Natur können wir mit Sicherheit aussagen, dass es eine genaue Grade mit plötzlichem Anfang und Ende sei. Von Strich und Faden, die beide Dicken haben, nicht zu reden, desgleichen nicht vom Lichtstrahl, der, wie Newton es nennt, Anwandlungen hat, noch von der geschliffenen Kante, welche immer mit Abweichungen von der Grösse der Körner des Schleifpulvers behaftet sein muss, so zwingen uns physikalische Ueberlegungen, überhaupt alle wie auch immer erzeugten Kanten und Flächen, frische unter günstigsten Bedingungen entstandene Krystallkanten, kapillare Flüssigkeitsoberflächen, auch die Kante des schwimmenden Tropfens, als mit einer Schaar Abweichungen von dem ideal-genauen geometrischen Gebilde behaftet anzunehmen. Denn von keiner Substanz, die einer Volumänderung, Mischung, Erwärmung, Electricitätsaufnahme fähig ist, oder die aus chemisch zusammengesetzten Atomen besteht, wird man genau gleichförmige Raumausfüllung voraussetzen dürfen. Jeder noch so kleine Raumtheil solchen Stoffes wird Variationen seiner Beschaffenheit enthalten, so dass schliesslich in der für unsere Sinne vorhandenen Welt jede scheinbar noch so glatte Linie bei hinreichender Vergrösserung als ein langgestrecktes Gebilde mit unzähligen Windungen oder Verdickungen sich herausstellen würde. Aus ähnlichen Gründen sind eben auch keine genauen Enden einer Länge vorauszusetzen.

Höchst wichtig ist aber, dass selbst wenn es genaue Geraden in der Natur gäbe, wir es nie würden erkennen können. Denn unser Merkmal der geraden Linie ist ein indirectes, welches vorschreibt, dass an diesem Gebilde gewisse Wahrnehmungen wegfallen. Z. B. wenn man sie um zwei Stellen auf ihr, die man festgehalten

denkt, sich drehen lässt, so darf ihr Anblick keine Veränderung erleiden, wobei wir auch uns selbst um die Gerade so bewegt denken dürfen, dass zwei ihrer Puncte stets auf dieselbe Netzhautstelle fallen. Stellt man sich die Gerade unbegrenzt vor, oder sieht man doch von ihren Enden ab, so ist es nur ein anderer Ausdruck für jenes Merkmal, wenn man das Kennzeichen der Geraden darin findet, dass sie im Gegensatz zu allen andern geometrischen Gebilden durch zwei »Puncte« festgelegt ist, während sonst drei Puncte nöthig sind, um ein geometrisch Vorgestelltes räumlich zu fixiren. Bei der Kante bedeutet dies physikalisch, dass wenn sie in zwei Fassungen läuft, ihr mikroskopisches Bild sich nicht verändern darf, während sie in ihrer Führung verschoben wird.

Nun, Angesichts des Umstands, dass alle Instrumente, mit denen wir Abweichungen beobachten können, deren Nichtvorhandensein nach irgend welcher Definition die Gerade kennzeichnet, aus menschlichen Händen hervorgehen, wird Niemand glauben, dass sie je gestatten werden, beliebig kleine Abweichungen zu messen. Aber, selbst wenn wir die Apparate aus Götterhänden erhielten, und wenn sie mit Wunderkräften ausgestattet wären, würden sie uns nimmermehr gestatten eine vollkommene Gerade als solche zu erkennen. Durch das Messen müsste man doch feststellen, dass gewisse Abweichungen, oder allgemeiner ausgedrückt, gewisse möglicherweise vorhandene Grössen nicht vorhanden, sondern streng Null sind. Dieser Nachweis verlangt aber, dass die vergrössernden Vorrichtungen optischer, mechanischer, oder irgend welcher Natur unendlich im Sinne des Idealisten, vergrössern, die Vergrösserung müsste schrankenlos sein, was, wie man es wenden mag, menschlich undenkbar ist.

Allein es handelt sich nicht um die Möglichkeit voll-

kommener Maassvorrichtungen, sondern darum, ob wir uns von ihrer Genauigkeit würden überzeugen können. Wir müssten doch die Apparate zu controlliren vermögen. Wenn wir aber auf unsere Controlle uns sollen verlassen dürfen, so müssen die Controllapparate aus Stoffen, die uns vertraut, mit technischen Hülfsmitteln, die uns geläufig sind, angefertigt sein, so dass wir ihre Zuverlässigkeit abschätzen können. Da solche Abschätzung wegen der Ungenauigkeit unserer Sinne und unserer Technik stets nur ein gewisses Maass von Genauigkeit ergeben kann, so stehen wir wieder auf dem alten Fleck. Es ergiebt sich: Menschlichem Erkennen entginge unter allen Umständen das völlig Genaue, wenn als gewiss nur das innerhalb des Vorstellungssystems Gefolgerte gilt.

Die ideale geradlinige Strecke ist also lediglich das willkürlich angenommene Ende einer Folge von Vorstellungen stets feinerer Messungen, eine Folge die aber nachweislich ein Ende nicht haben kann. In der Welt, wie sie unsern Wahrnehmungen sich zeigt, spricht Nichts zu Gunsten des Vorhandenseins der geometrischen Ideale, vielmehr Alles dagegen.

Was bleibt, wenn wir solchen Ueberlegungen uns hingeben, vom idealistischen System übrig?

Die Längeneinheit, wenn wir z. B. nur an ihre Endpunkte denken, ist also wissenschaftlich nur eine beliebig genaue, also eine innerhalb beliebig kleiner Unterschiede schwankende Vorstellung, wie die eines Etalon's, d. i. eines mit allen Präcisionsmitteln einer wissenschaftlichen Epoche versehenen Grundmaasses. Die Theile der Längeneinheit unterliegen derselben allerdings in der Idee beliebig einzuschränkenden Ungenauigkeit. Man wird solcher Theile in jeder beliebig kleinen Strecke unzählige sich vorstellen können, eben

655240

weil die beliebig geringe Ungenauigkeit eine beliebig geringe Unsicherheit beim Theilen sich zu denken erlaubt. Aber das Verfolgen dieser fortgesetzten Theilung verliert sich der schwankenden Längenvorstellung wegen in's Undeutliche. In Gedanken kann man die Theilung soweit treiben, wie man will, das Ergebniss ist indessen nicht das Unendlichkleine, sondern Ermüdung und Entmuthigung des Denkens, das bei seinem Vordringen in nebelhaft Gleichförmiges kein Ende sieht.

Die mathematischen Wissenschaften bedürfen übrigens der vollständigen Genauigkeit der geometrischen Vorstellungen offenbar nicht. Für diejenige Wissenschaft, die sie am ersten fordern könnte, die Geometrie, reicht durchweg die Präcision der Geraden der Natur aus, wenn man bedenkt, dass man die Geraden ja beliebig lang sich vorstellen kann, wobei also ihre unvermeidlichen Ungenauigkeiten, etwa die molekularen, im Verhältniss zur Länge beliebig verkleinert werden können. Für Punkte haben wir ohnehin in den Fixsternen, die auch den stärksten Vergrösserungen als Puncte erscheinen, ein unser Strengebedürfniss befriedigendes Beispiel, und das von einem Fixstern in unsere Pupille gesendete Strahlenbündel ist gewiss auch eine allen Anforderungen der Geometrie genügende Gerade.

Indem ich somit von der empiristischen Anschauungsweise aus das genaue Maass als eine reine Schöpfung sprachlichen Denkens und ausserhalb der Wirklichkeit befindlich ansehe, ja finde, dass selbst, wenn es Wirklichkeit besässe, wir dies nie würden erkennen können, so verwerfe ich es als Grundlage des mathematischen Begriffssystems. Ich muss auch die Folgerungen des Idealisten, deren alleinige Stütze die Idee der genauen Länge ist, ablehnen, nämlich seine

Theorie des Unendlichkleinen mit dem daraus sich ergebenden Beweis für das Vorhandensein einer Grenze irrationaler Zahlen, sowie diese Grenze selbst. Indessen, wenn ich diese Grenze irrationaler endloser Decimalbrüche läugne, so muss ich hinzufügen, dass in meinen Augen auch von Grenzen rationaler endloser Decimalbrüche wie eben von idealgenauen Werthen überhaupt nicht die Rede sein kann.

Wollen wir vor Denkergebnissen wie das idealistische Unendlichkleine mit seinen sonderbaren Eigenschaften geschützt sein, so dürfen wir das wirkliche Vorstellungsgebiet des Menschen nicht verlassen. Denn unsere Denkgesetze, d. i. die uns natürlichen Vorstellungsfiliationen sind im Laufe des Werdens unseres Geschlechtes aus der Erscheinungswelt abgezogen, und es ist nicht wahrscheinlich, wenn schon möglich, dass einmal Neues zum Vorschein komme, das unseren vertrautesten Denkformen eben so widerspricht, wie z. B. der erweiterte Gleichheitsbegriff des Idealisten dem allgemein verbreiteten. Daraus dass er in sein Denken Begriffe verpflicht, die Unwirklichem, nur Geahntem entsprechen, entspringen die mannigfachen Paradoxien, welche der Idealismus auf allen Denkgebieten zur Folge hat.

IDEALIST.

30. Die Existenz des genauen Maasses wird idealistisch begründet.

Der Haupteinwand, den der Empirist gegen mein System erhebt, ist die Unwirklichkeit des meinen logischen Operationen zu Grunde liegenden genauen Maasses.

Nun, dass eine genaue Gerade mit dem Stoff, aus welchem die uns bekannte Körperwelt besteht, wahrscheinlich nicht mechanisch herstellbar ist, gebe ich unbedingt zu. Ich räume

auch ein, dass, selbst wenn wir ein vollkommen genaues Prisma in Händen hätten, keine Vorrichtung uns davon würde Kunde geben können, dass daran kein Fehl ist.

Allein unsere gesammten wissenschaftlichen Vorstellungen sind derart von den geometrischen Idealen durchdrungen, das genaue Maass liegt so sehr in der Richtung des gemeinen Denkens, dass erst der kritische Verstand es als Ideal, als etwas dem Gebiet der Wahrnehmung nicht Angehöriges erkennt, und den Unbefangenen vielmehr die Rechtfertigung seiner Zulässigkeit befremden wird. Er wird fragen, seit wann man die Entfernung zweier Puncte als genauen Begriff erst erklären müsse, der doch jedem Schulknaben geläufig sei. Eine so tief und allgemein eingewurzelte Anschauungsweise ist nicht leicht auszurotten, und es möchte mehr Erfolg versprechen, sie wissenschaftlich festigen, als sie wissenschaftlich beseitigen zu wollen. Denn der Gedanke, dass es keine genauen Maasse in der Welt gebe, würde die Denkenden auf die Dauer dergestalt beunruhigen, dass sie schliesslich doch wieder zum Glauben an die geometrischen Ideale zurückkehren würden. Bei jeder Grössencombination, aus der man etwas folgern wollte, hätte man ein schlechtes Gewissen! Die geometrischen Ideale dürften folgendem Gedankengang entspringen und auf ihn ihr wissenschaftliches Daseinsrecht gründen.

Aus den mannigfaltigen Vorstellungen der Erscheinungswelt ist der Raumbegriff die äusserste Abziehung. Raum ist ein Gemeinsames aus den Vorstellungen aller Sinne, besonders aber des Gesichts- und Tastsinns und des Muskelgefühls.

Das Nebeneinander, Uebereinander, Hintereinander in vergleichbaren Abständen, und die relative Bewegung des Wahrgenommenen und des Wahrnehmenden, alles dies liess als Rest den sogenannten Raumbegriff. Im Raum denken wir sodann

uns selbst und die Dinge beweglich, durch andere ersetzbar, so dass der Inhalt des Raums in unserer Vorstellung schliesslich das Unwesentliche wird. Hierdurch wird die Abziehung vom leeren Raum eingeleitet, welche echt wissenschaftlicher Natur ist. Für unsere Zwecke würde es ausreichen, auf die Vorstellung vom homogenen Raum uns zu berufen, die aus den Wahrnehmungen an durchsichtigen flüssigen Stoffen abgezogen ist. Da indessen das wissenschaftliche Denken die Homogeneïtät dieser Naturkörper in Frage stellt, so sind wir doch wiederum genöthigt, den leeren Raum unseren Betrachtungen zu Grunde zu legen.

Die Vorstellung vom leeren Raum ist ohne Zweifel eine Grenze von wirklichen Vorstellungen, von der man freilich nicht wissen kann, ob sie selbst wirklich ist, d. i. ob es einen Raum giebt, oder geben wird, in dem sich die Körper genau nach der Trägheit bewegen, der keinen Lichtstrahl durchlässt, in den keine Kraft eindringt, kurz ob in den physikalischen Sammlungen der Zukunft neben den Gasentleerungsvorrichtungen die Imponderabilienpumpe stehen wird. Für diejenigen, welche die Weltmaterie als begrenzt oder doch aus isolirten Ansammlungen bestehend annehmen, ist der leere Raum ja ohnehin eine nothwendige Folge ihrer Anschauungsweise. Auf alle Fälle werde ich den leeren Raum meinen Betrachtungen zu Grunde legen dürfen. Denn jedes Zimmer ist das Bild, die wirkliche Vorstellung eines Raumes, und da ich den darin enthaltenen Stoff zum grossen Theile — die genügenden Vorrichtungen vorausgesetzt — entfernen kann, so ist die Vorstellung, dass aus diesem oder jenem Raum Alles Stoffliche entfernt sei, eine ganz natürliche Grenze meiner wirklichen Vorstellungen, und die Wissenschaft müsste auf Vieles verzichten, wäre ihr die Annahme dieser

Grenze nicht gestattet. Ich gehe also aus von der Idee des leeren oder allgemeiner des homogenen Raumes.

Offenbar kann man in jeden leeren Raum, von dessen übrigem Inhalt man also absehen muss, nicht allein unzählige Figuren hineindenken, sondern sie sind auch wirklich darin vorhanden. In jenem Marmorblock steckt Dein Standbild. Beweis ist, dass es der Bildhauer nach Maassgabe seines Geschickes mehr oder weniger ähnlich herausmeisseln kann. So behaupte ich auch, dass in jenem Raum, den ich mir homogen denke, wie es die Luft für unsere Sinne ist, oder leer annehme, jede genau beschreibbare Raumfigur nicht nur hinein gedacht werden kann, sondern wirklich darin vorhanden ist. Wenn ich mir zu einem Punct als Mittelpunct eine Kugel denke, deren Oberfläche durch einen zweiten Punct geht, so ist wirklich für irgend ein beliebig festzulegendes Punctepaar im Raume eine solche Kugel vorhanden, so gut wie im Marmorblock, aus dem man sie ja herausmeisseln kann. Dies ist eine so natürliche Vorstellung, dass sie selbst dem Kinde einleuchtet*).

Aber man hat nicht nöthig, die Phantasie anzurufen, um die Ueberzeugung vom Vorhandensein des geometrisch Genauen zu erwecken. Die Speculation über die letzten Bestandtheile der Körperwelt führt zum gleichen Ergebniss. Wie man das Raumausfüllende sich auch vorstellen mag, als System fernwirkender Puncte oder als gleichartigen, stetigen Stoff (denn ein drittes kann es logisch nicht geben, da ungleichartiger Stoff dem Verstande so lange zusetzt, bis er ihn in homogene Raumvorstellungen oder in Rauminhaltloses zerlegt hat), so muss zergliederndes Denken stets einmal bei genauen Gebilden anlangen. Wird der Stoff als gleichartig ge-

*) Diese Betrachtung wurde dem Verfasser dieser Schrift als Knaben von seinem Vater mitgetheilt.

dacht, so muss er Begrenzungen welcher Gestalt auch immer haben, die mit aller Schärfe das Ende des einen Gleichartigen und den Anfang des anderen Gleichartigen bilden. Beruhigt das Denken sich aber nicht bei dem gleichartigen, stetigen Stoff, sondern zerlegt ihn weiter bis zu rauminhaltlosen, fernwirkenden Formelementen, dann sind diese, wenn sie die Grenze des Denkens sein sollen, ebenfalls nur als strenge Gebilde, als ideale Puncte, Linien, Flächen aufzufassen. Falls man von diesen nur die Puncte beibehalten will, so ist deren Entfernung eine Gerade, die doch wenigstens genaue Enden hat, welches die Grundannahme des idealistischen Systems ist.

Es liegt in meinen Augen sogar etwas Widersinniges darin, nur ungenaue Formen zugeben zu wollen. Was hat schliesslich eine besondere Ungenauigkeit vor der Genauigkeit voraus, und ist nicht die besondere Ungenauigkeit in ihren Umrissen nothwendig genau, so dass man auch im Ungenauen gezwungen ist Genaues zu erkennen? Wir werden doch dem geometrischen Ideal dasselbe Daseinsrecht einräumen müssen, wie irgend einer Verzerrung des Ideals!

Gewiss also sind die Menschen Idealisten. Wozu sollten sie es sich denn sauer werden lassen, um sich Zweifel an der Evidenz der geometrischen Ideale einzureden, wenn sie damit Nichts erreichen, als für eine klare und präcise Anschauung eine unsichere und schwankende Vorstellungsweise einzutauschen?

Das Unendlichkleine, untrennbar vom Idealgenauen, welches der Empirist als eine Gefahr darstellt, vor der man sich schützen müsse, hat sich zwar noch nicht seinen unbestrittenen Platz im allgemein menschlichen Begriffssystem erworben, was jedoch, wie ich zeigte, sich genügend erklären lässt. Das Unendlichkleine ist aber dem Unendlichgrossen unabweisslich zugeordnet, welches willig Zutritt findet, ja unbedingt zum

allgemeinmenschlichen Begriffssystem gehörig anzusehen ist. Namentlich ist es der erweiterte Gleichheitsbegriff, nach welchem a + unendlichklein = a ist, wenn a endlich ist, der dem Empiristen zu widerstreben scheint und den er eine sonderbare Eigenschaft des Unendlichkleinen nennt. Nun aber ist in der Mathematik längst die Gleichheit eingebürgert: ∞ + endlich = ∞. Jene Eigenschaft des Unendlichkleinen ist formal von dieser des Unendlichen nicht verschieden. Jene Gleichheit ist gleichsam gegen diese um eine Grössenstufe herabgesetzt. Man kann die Sache aber noch anders fassen. Es kann festgesetzt werden, dass das Gleichheitszeichen nur den endlichen Theilen an beiden Seiten der Gleichung gilt, wie ja bei manchen Rechnungen bestimmt wird, dass es nur den reellen oder nur den imaginären Theil der Seiten der Gleichung betrifft. Auf diese Weise nimmt man in die Rechnung jene Eigenschaft des Unendlichkleinen, Endliches additiv nicht zu verändern, nicht hinein, wenigstens nicht formal. Denn der Sinn der Operationen setzt sie doch voraus.

31. Ueber die doppelte Auffassung der geometrischen Ideale.

Die Definition der geometrischen Ideale ist keine feststehende, sondern man begegnet zwei wesentlich verschiedenen Auffassungen von Punct, Linie und Fläche, bei deren einer dem Unendlichkleinen eine bedeutsame Rolle zufällt. Es ist hier der Ort mit einigen Worten auf diese Frage einzugehen.

Die geometrischen Idealvorstellungen können auf doppelte Weise als Grenzen von gewöhnlichen Vorstellungen entstanden gedacht werden. Nach der einen geht der Gedanke vom geschlossenen Raum aus, der durch Flächen begrenzt ist, beginnt also mit der idealen Fläche, die nur nach ihrer einen Seite

hin, wo sie den gegebenen Raum von seiner Umgebung trennt, eine genaue Grenze bildet, nach der andern ebenso unbeachtet bleibt, wie bei der Vorstellung vom Winkel der Raum zwischen seinen Schenkeln. Zwei Flächen schneiden sich sodann in einer Kante, die ihrerseits durch zwei weitere Flächen begrenzt, die Strecke mit ihren Endpuncten erzeugt.

Die andere Entstehungsweise der geometrischen Ideale stützt sich auf die Grenzvorstellung des Unendlichkleinen, und entwickelt die geometrischen Grundvorstellungen in umgekehrter Ordnung. Ihr ist zunächst ein Punct mit einem Raum gleichbedeutend, der sich in jeder Richtung in's Unendliche zusammenzieht, also mit einem Raum, der in keiner Richtung durch endliches Maass gemessen werden kann. Die Linie lassen sodann einige Autoren durch Fortbewegung jenes unendlichkleinen Punktraums entstehen, und die Fläche durch Bewegung der Linie. Abgesehen davon, dass diese Vorstellungsweise eine Art Maassbeziehung zwischen den drei geometrischen Grundidealen bedingt, der sie an sich nicht unterliegen, entspringt sie nur einem besonderen Bilde, etwa der Entstehung von Hohlräumen in Teigen durch Eindringen fester Körper, greift also auf die Bewegung zurück, und besitzt überhaupt nicht den Grad von Abgezogenheit, den man bei Festlegung so wichtiger Begriffe anstreben muss.

Man wird die Linie, ohne auf die Entstehungsweise des Punctes Rücksicht zu nehmen, auffassen müssen als Grenze eines dünnen Fadens. Nach diesem Definitionsprincip ist die Fläche als ein nach einer Dimension unendlichdünner Körper anzusehen, der Vorstellung entsprechend, welche Gauss damit verbunden wissen will (*disquisitiones circa superficies curvas*, Art. XIII.). Unstreitig schliesst die zweite Entstehungsweise sich besser an die mathematische Vorstellung von den geometrischen

Grundgebilden an. Allein sie setzt den Begriff des Unendlichkleinen voraus, den wir doch erst von genauen geometrischen Vorstellungen der ersten Art ausgehend erhalten.

Somit dürfte der folgerichtigste Gedankengang, welcher zu den geometrischen Idealen der Mathematik führt, dieser sein: An die Spitze ist die erste Vorstellungsweise zu stellen, bei der die begrenzte Grade als Kante gedacht wird. Aus der Vorstellung der genauen Kante folgt dann, wie ich es im idealistischen System zeigte, der Begriff des Unendlichkleinen, und diese Abmessung ermöglicht schliesslich die geometrischen Ideale nach der zweiten Auffassung.

EMPIRIST.

31. Schluss der empiristischen Kritik des Idealismus.

Was bisher für und wieder die Aufstellungen des Idealisten aus unserer beiden Feder geflossen, genügt, um den unversöhnlichen Gegensatz unserer Anschauungsweisen deutlich zu erkennen, der nicht allein auf die mathematischen Grundbegriffe, sondern auf unsere gesammte Naturauffassung sich erstrecken muss. Eine Vorstellungsfolge, die den Wunsch erregt, ihr bis zu ihrem Abschluss nachzugehen, kann so beschaffen sein, dass sie einen solchen Abschluss innerhalb unseres Vorstellungssystems nicht besitzt. Ich begnüge mich die Vorstellungsreihe soweit zu verfolgen, als sie eben noch Vorstellungen enthält, der Idealist denkt sich aber den Abschluss vorhanden, auch wenn er seine Existenz nicht beweisen, geschweige je eine Vorstellung davon sich bilden kann. Der Idealist hilft sich also mit Axiomen.

Ein solches ist und bleibt die Existenz des genauen Maasses. Denn ich kann nicht finden, dass sein eben dafür versuchter

Beweis irgendwie bindend sei. Er stützt sich gleich Anfangs auf eine unvorstellbare Grenze, den leeren oder den homogenen Raum. Doch selbst diese zuzugeben, braucht man durchaus nicht damit einverstanden zu sein, dass der leere Raum jede Figur wirklich enthält. Thatsächlich enthält er Nichts: wir aber holen aus unserem Gedächtniss Bilder von ziemlich genauen Figuren hervor, und stellen uns sodann statt des leeren Raums einen Raum vor, der diese Figuren enthält. Das ist unstreitig Alles, was geschehen ist. Die Art, wie der Idealist aus diesem Vorgang das Vorhandensein der Ideale schliesst, scheint mir verfehlt. Denn seiner Argumentation, im Raum seien die geometrischen Ideale vorhanden, weil in jedem Marmorblock unzählige Standbilder ihrer Befreiung durch den Bildhauer harren, das Ideal übrigens doch ebenso wahrscheinlich sein müsse, wie eine besondere Abweichung, liegt unbedingt die Voraussetzung des Ideals schon zu Grunde, da von einer besondern Abweichung, deren geometrische Bestimmung derselben Art ist, wie die der Ideale, dasselbe wie von diesen gelten muss. Wenn ich von ungenauen, d. i. von zwischen irgendwie festzusetzenden Grenzen schwankenden geometrischen Gebilden rede, so meine ich damit nicht eine besondere, sondern jede mögliche in jenen Grenzen enthaltene Figur.

Zuletzt beruft sich der Idealist auf die letzten Formelemente der Körperwelt, die genaue Grenzen haben müssen, widrigenfalls man noch nicht zum letzten Grad der Abziehung vorgedrungen sei. Doch kann hieraus das Dasein genauer Gebilde einfach deshalb nicht geschlossen werden, weil jene letzten Formelemente gerade so unvorstellbare Grenzen von Vorstellungen sind, wie die geometrischen Ideale, wie diese erachte ich sie gleichfalls als unzulässig. Gegen Corpusculartheorien habe ich Nichts einzuwenden, Atome aber verwerfe ich.

Der Unterschied unserer logischen Methoden zeigt sich schon auf das Schärfste bei einer Begriffsfestsetzung des Idealisten, auf welche er selbst besonderes Gewicht legt, ich meine seine Unterscheidung zwischen »unbegrenzt« und »unendlich«, die ich zum Schluss noch anfechten will. Mit dem besten Willen vermag ich nur Endliches, beliebiges Grosses und beliebig Kleines mir zu denken, und sehe es als einen unglücklichen Zufall an, dass »unendlich« wie »nicht endlich« lautet. Der ursprüngliche Sinn des Wortes ist sicherlich »ohnendlich«, d. i. ohne Ende, was mit unbegrenzt übereinkommt.

Dass unsere Sinneswahrnehmungen uns nur eine höchst unvollkommene Einsicht in das Wesen der Dinge gestatten können, wer bezweifelt es? Auch meine Gedanken flattern zuweilen ängstlich und sehnsuchtsvoll an dem Gitter des Endlichkeitskäfigs. Allein ich erblicke in dem Hange die natürlichen Schranken unseres Vorstellungsvermögens mit unfassbaren Begriffsgrenzen zu überschreiten, eine Verirrung des Erkenntnisstriebes, und halte es für weise, wie andere Triebe, so auch diesen gelegentlich zu zügeln, und mich zu bescheiden, wo tieferes Erkennen versagt ist.

IDEALIST.

Die psychologische Gegenüberstellung unserer Anschauungsweise durch den Empiristen ist in einem Puncte unvollständig, der dem Idealisten geradezu entscheidend dünkt. Unser Denkgebiet enthält nicht allein die Mosaik des Wahrnehmbaren und die daraus durch den Denkprocess, also durch Deformation und Combination abgeleiteten Vorstellungen und Begriffe, sondern es wohnt uns die unerschütterliche Ueberzeugung inne, wie sie uns ward ist hier gleichgültig, vom Vorhandensein gewisser Dinge ausserhalb des Vorstel-

lungssystems. Dies ist ein »Gefühl« ähnlich dem, das uns als Grund unserer Wahrnehmungen wirkliche Existenzen ausser uns annehmen lässt, wenngleich unser Wahrgenommenes ihnen zuversichtlich nicht gleicht, und wir wohl nie im Stande sein werden, von dem Wirklichen, dessen Zeichen, wie Hr. Helmholtz sich ausdrückt, unsere Wahrnehmungen sind, eine Vorstellung uns zu bilden.

Zu diesem Wirklichen, der unerforschbaren Machinerie hinter den Coulissen der Erscheinungswelt, stehen die idealistischen Begriffe von unendlich, genau, u. s. f. in unmittelbarer Beziehung. Wenn der Idealist es ebenso aussichtslos erachtet, wie sicherlich auch der Empirist, über die eigentliche Beschaffenheit des Wirklichen zu grübeln, so versucht er aus ähnlichen Gründen auch nicht die Existenz des von ihm ausserhalb des Vorstellungssystems Gedachten, des Unendlichen, des Genauen, u. s. f. im gewöhnlichen Sinne zu beweisen. Denn ein Beweis wie eine Erklärung ist doch schliesslich, allgemein zu reden, die Herstellung einer logisch befriedigenden Vorstellungsfolge zwischen einer Vorstellung, die uns beunruhigt, und solchen Vorstellungen, die unseren Frieden nicht stören. Die Folge müsste also mit ihren beiden Enden innerhalb unseres Vorstellungssystems liegen. Mithin ist ein solcher Beweis für die Existenz der geometrischen Ideale undenkbar.

Allein es giebt eben Fälle, wo das Dasein einer Grenze von Vorstellungen, bei denen die Vorstellungen innerhalb, ihre Grenze ausserhalb der Schranken des allgemeinmenschlichen Vorstellungssystems liegen, unmittelbar einleuchtet, wie bei der Raumunendlichkeit. Endlich, d. i. mit Vielfachen von Längeneinheiten abmessbar ist der Raum nicht. Nehmen wir also den Raum gegenständlich, unabhängig vom Vorhan-

densein denkender Wesen an, so können seine Abmessungen nicht endliche sein. Mehr behauptet der Idealist nicht, und allein von dieser Eigenschaft der Raumabmessung macht er Gebrauch. Mit dem Genauen verhält es sich ähnlich. Ist der Raum zugegeben, so ist es auch der leere, denn das zufällig im Raum Enthaltene verändert seinen Ort, ohne am Raum etwas zu ändern. Der Raum ist selbstständig. Wenn mir weiter im Marmorblock das Vorhandensein eines Tetraeders, dessen Ecken ich ja dem Bildhauer mit aller durch die Beschaffenheit des Marmors erlaubten Genauigkeit vorschreiben kann, eingeräumt wird, so kann ich für irgendwelche Figuren im Raum ein Gleiches beanspruchen. Dann wird am Ende der Vorstellungsfolge immer weniger von dem Idealen abweichender Gebilde z. B. die genaue Kante stehen und ebensowenig wie die Raumunendlichkeit zurückgewiesen werden können.

In der empiristischen Darstellung des psychologischen Vorgangs, der zu den Idealen führt, ist also der unwiderstehliche Zwang nicht erwähnt, der uns nach gewissen Richtungen hin aus dem Gebiet des Vorstellbaren treibt. Ja, wenn wir diesen uns so natürlichen Gedanken nachhängen, so erblickt der Empirist darin eine Verirrung des Erkenntnisstriebes. Diese seine Weltanschauung mag ihn vor mancher Täuschung schützen: Doch ist die Entsagung, welche er sich auferlegt, eben nicht Jedermanns Sache. Indem er seinen Gedanken nur innerhalb solcher Vorstellungen und Begriffe freien Lauf lässt, welche Wahrnehmungen entsprechen oder daraus abgeleitet sind, handelt er wie der zahme Knabe, der den Zaun des Gartens nicht übersteigt. Der idealistische Gedanke, ein wilder Knabe spottet der Schranken, nennt das ganze Vorstellungs- und Ahnungsgebiet sein eigen,

und liebt es durch Gestrüpp und über Klippen weitausblickende Höhen zu ersteigen. Er wird sich verirren können, gewiss aber mehr zu sehen bekommen als der zahme Knabe.

Der Empirist hat in seiner Kritik des idealistischen Systems fast Alles verworfen, was wir mathematische Grundbegriffe nennen, und womit wir den Anfänger schon an der Schwelle dieser Wissenschaft auszurüsten pflegen. Er will nichts wissen vom genauen Maass, von genauen geometrischen Gebilden. Er läugnet das Vorhandensein der mathematischen Grenze. Für ihn giebt es nur Endliches und keine Unendlichkeit in Raum und Zeit. Er belehre uns jetzt darüber, wie er seine Ansichten mit den Anforderungen der Mathematik an Strenge der Begriffe in Einklang setzen will.

Das empiristische System.

EMPIRIST.

33. Die empiristische Reinigung des Begriffssystems.

Die Grundgedanken der empiristischen Anschauungsweise habe ich in meiner Kritik des idealistischen Systems bereits ausgesprochen oder doch angedeutet. Um sie auf die Principien der Analysis anwenden zu können, muss ich, weil sie eben nicht den freien Gebrauch der allgemein menschlichen Begriffe gestatten, sondern deren Einschränkung nach gewissen Richtungen hin fordern, ausführlicher darlegen, welches meine Voraussetzungen sind.

Alles wissenschaftlich Wohlbegründete, jede zuverlässige Erkenntniss geht von den unmittelbaren Wahrnehmungen aus, und muss sich wieder auf unser dem Wahrnehmbaren entsprechendes Vorstellungssystem zurückführen lassen. Ich verstehe hier unter Wahrnehmungen Alles uns bewusst Werdende, mithin nicht allein sinnliche, sondern auch auf unseren Denkvorgang bezügliche Wahrnehmungen.

Dieser Satz bedarf einiger Erläuterungen und Ergänzungen. Wenn ich das Wahrnehmungssystem als einzig zuverlässige Grundlage meines wissenschaftlichen Denkens ansehe, so ist dies so zu verstehen, dass ich nur den Theil unseres Begriffssystems zulasse, der irgendwie auf Wahrnehmungen zu-

rückführbar ist. Die in das Denken eingehenden Vorstellungen entsprechen nicht nothwendig, ja zum geringsten Theile geschehenen Wahrnehmungen, sie sind vielfach Gebilde der Phantasie, einer seelischen Thätigkeit, welche durch Zerlegung, Zusammensetzung, Aenderung von Grösse, Form, Intensität, Qualität (unter Qualität z. B. Farbe, Ton verstanden, kurz das was nicht auf lineäre mathematische Grössen zurückführbar ist) des Wahrgenommenen unser Vorstellungssystem, wie es ist, gebildet hat, und es unausgesetzt bereichert.

Unsere gesammte Vorstellungsmosaik muss daher rückwärts durch Zusammensetzung, Zerlegung, Aenderung von Grösse, Form, Intensität, Qualität auf sinnlich Wahrnehmbares zurückgeführt werden können. Insofern dies bei einer Vorstellungsart möglich ist, will ich sie eine wirkliche nennen. Nun bemerkte ich schon (pag. 95), dass in unserem Begriffssystem Worte auftreten, denen keine wirklichen Vorstellungen entsprechen, sondern unvorstellbare Grenzen von Vorstellungen. Nur als Wort ist eine solche Grenze eine wirkliche Vorstellung, in Wahrheit ist sie eine unbestimmte Ahnung, ein versuchtes Ueberschreiten unserer geistigen Schranken, das nie gelingen kann. Dergleichen blosse Wortbegriffe verbanne ich aus meinem Denkprocess, ich weise die geometrischen und viele andere Ideale an dessen Schwelle ab.

Dieser empiristischen Reinigung des Begriffssystems liegt indessen eine Voraussetzung zu Grunde.

Wenn ich das empiristische Begriffssystem Punkt für Punkt der unmittelbaren Wahrnehmung entsprechend annehme, so soll damit zunächst keineswegs behauptet sein, dass jeder heranwachsende Mensch es von Neuem aus seinen Wahrnehmungen zu bilden habe. Vielmehr lassen sich die überzeugendsten Gründe dafür beibringen, dass unser Begriffs-

system — und nicht blos das empiristische — zum grossen Theile vererbt wird *). Aber die Annahme, dass unser Begriffssystem, gleichviel ob vom Geschlechte oder vom Einzelnen erworben, und wenn daraus die Worte für Ahnungen und seelische Gefühle von Unvorstellbarem entfernt gedacht sind, nur Wahrnehmbares oder Stücke von Wahrnehmungen (um es kurz auszudrücken) enthält, ist eben nur eine Annahme, und sie kann, wie sogleich zu zeigen, angegriffen werden. Unser Vorstellungssystem, in welches unser Begriffssystem doch zunächst aufzulösen ist, könnte nämlich noch ein drittes enthalten, nämlich Vorstellbares, das nachweislich nicht auf Wahrnehmungen oder Stücke von Wahrnehmungen sich zurückführen liesse. Denkbar ist es wohl, dass im Laufe der Zeiten, vom Anfang des Organischen bis zur Entwickelung des Säugethiergehirns und später noch Wahrnehmungen gewirkt hätten, die heute nicht mehr zu machen sind. Dies müsste aber die Analyse unserer Begriffe ergeben, auch wäre eine so merkwürdige psychische Erscheinung sicher schon bemerkt worden. Dennoch zwingt uns die angedeutete Möglichkeit die empiristische Anschauungsweise noch durch die Annahme zu ergänzen, dass es keine menschlichen Vorstellungen giebt, die nicht aus noch heute möglichen Wahrnehmungen oder Stücken von Wahrnehmungen sich zusammensetzen liessen.

34. Anwendung der empiristischen Principien auf die analytischen Ausgangsvorstellungen. Vorbemerkungen.

Dies sind die Hauptzüge der empiristischen Anschauung, und nun werde ich zeigen, welchen Inhalt sie in die Grundbegriffe der Analysis legt.

*) Diese Frage wird in der p. 12, und 96 Anm. angekündigten Schrift erörtert.

Ich schicke voran, dass meine Ausgangsvorstellungen genügen müssen, um zu allen Sätzen, Methoden, kurzum zu allen Ergebnissen der Mathematik zu gelangen, um daraus diese Wissenschaft in jeglicher Entwickelungsstufe ableiten zu können. Denn eine richtige Beziehung zwischen Begriffen, die sich schliesslich in Wahrnehmungen oder Stüke von Wahrnehmungen auflösen lassen, muss ich auch von den Wahrnehmungen aus erreichen können ohne Beihülfe von Unvorstellbarem. Der Idealist kann also nicht zu irgend einer richtigen Gleichung zwischen mathematischen Grössen gelangen, die ich nicht auch von meinen Vorstellungen aus abzuleiten vermöchte. Allerdings wird er Beziehungen zwischen seinen Fictionen, dem Idealgenauen, dem Unendlichkleinen etc. finden, die sich mir nicht darbieten, doch nur weil ich die Fictionen nicht einführe.

Meine erste Aufgabe ist den Grenzbegriff empiristisch zu erklären, der idealistisch als Axiom angesehen werden muss. Denn es ist hier gleichgültig, ob der Idealist uns zumuthet, an die Grenze selbst, oder an das Unendlichkleine oder an das Idealgenaue zu glauben, — irgendwo, am Anfang, in der Mitte, oder am Ende muss Glauben ein Glied der Kette seiner Schlüsse ersetzen. In die empiristische Mathematik gehören keine Axiome. Wo sie deren bedarf, sind ihre Grundlagen unzureichend erforscht. Freilich werden unter Axiomen häufig noch nicht genügend zergliederte, doch offenbar im Gebiet des Wirklichen enthaltene Beziehungen zwischen gewissen Begriffen verstanden. Es sind nicht die echten. Das Axiom, wie es hier gemeint ist, stellt immer die Forderung, Unvorstellbares für eine Existenz zu halten.

Mein Beweis für das Vorhandensein der Grenze ergibt sich aus meinen geometrischen Grundvorstellungen. Es ist

eine wirkliche Vorstellung, wenn ich mir ein geometrisches Gebilde seiner Beschreibung genau und immer genauer entsprechend denke. Ich darf meiner Phantasie freies Spiel gewähren, wenn sie die Reisfeder, die Faser des Papiers, die Tusche ins Unbegrenzte idealisirt. Das Idealisiren überhaupt ist empiristisch durchaus berechtigt, auch wo es kein vorstellbares Ideal giebt. Denn, indem ich idealisire, ändere ich zwar meine Vorstellungen in von mir gewolltem Sinne stufenweise ab, sie bleiben aber stets wirkliche Vorstellungen. Vor dem Ideal selbst mache ich Kehrt. Es ist in meinen Augen nichts als ein eingebildeter Abschluss von Vorstellungsfolgen, die durch wissenschaftliches Denken erzeugt und thatsächlich ohne Abschluss sind.

Beispielsweise erlaube ich meiner Phantasie relative Grössenveränderungen. Was ich aus ihnen schliesse, wird, wenn die Schlüsse nach menschlichem Ermessen einwurfsfrei gezogen sind, innerhalb meiner Voraussetzungen wiederum nach menschlichem Ermessen richtig sein müssen. Die beiden kosmischen Touristen des Micromegas sind ohne Zweifel wirkliche Vorstellungen, und ich scheue mich keineswegs meinen Betrachtungen ähnliche Phantasmen zu Grunde zu legen. Als Beispiel einer Geraden, die den Bedürfnissen der Geometrie wohl genügen möchte, führte ich (p. 100) das Strahlenbündel an, welches von einem Fixstern ausgehend in unsere Pupille gelangt. Denken wir uns eine Tafel hinreichend gross und hinreichend eben, um einen Längsschnitt dieses Strahlenbündels aufzunehmen, den wir z. B. durch Kreide abbilden, und stellen uns sodann alle Dimensionen dieser Tafel bis zur Grösse einer Fensterscheibe verkleinert vor, so haben wir nirgends unser natürliches Vorstellungssystem verlassen, aber eine Ge-

rade ist gewonnen, die an Genauigkeit vielleicht Alles überragt, was Natur und Menschenhand zu leisten vermögen.

So hindert uns nichts, innerhalb der wirklichen Vorstellungen das Bild einer Geraden immer vollkommener zu gestalten, obschon es wahrscheinlich ist, dass innerhalb der Erscheinungswelt, in der wir leben, durch die Moleculardistanz oder Aehnliches der Genauigkeit geometrischer Gebilde eine Grenze gesteckt ist. Durchaus versagt ist unserer Phantasie, die Idee einer vollkommen genauen Geraden aus wirklichen Vorstellungen abzuleiten, wie ich in meiner Kritik des idealistischen Systems (Art. 31, p. 96) bewies.

So nun drängt sich die Meinungsverschiedenheit zwischen dem Idealisten und mir zusammen in der Gegenüberbestellung: vollkommen genau und beliebig genau, eine Unterscheidung, die Manchem unfruchtbare Haarspalterei dünken mag. Welche Verkennung! Es wird sich zeigen, dass sie von tiefster Bedeutung ist.

35. Empiristische Vorstellung von den geometrischen Gebilden.

Das eben entworfene empiristische Linienbild ist übrigens ein zweifaches, je nachdem man an eine idealisirte Zeichnung denkt, oder an eine räumliche Figur. In dem einen Falle stellt man sich, wie oben beschrieben, einen flachen Streifen, im andern Falle einen dünnen Stab oder Faden vor, für welchen das obige Strahlenbündel ein Beispiel ist. Meine Auffassung der Strecke bestimmt gleichzeitig meine Auffassung des Punktes. Auch der Punkt kann nur ein nach allen Richtungen hin beliebig kleiner Raum sein. Seine nähere Formbestimmung wird je nach den behandelten Problemen verschieden sein. Man wird ihn selbstständig definiren können, oder durch

Vorstellungen, bei denen er auftritt. Eine solche Beschreibung des Punktes ist die Umkehrung des Satzes: »Linien schneiden sich in Punkten«. Sie lautet: Punct ist das Räumliche, welches zwei sich schneidende Linien gemein haben. Bleiben wir bei dieser Begriffsbestimmung, die nur die Vorstellung der Linie erheischt, so ist die nächste Folge, dass, empiristisch gedacht, die Länge aus Puncten besteht, oder zusammengesetzt gedacht werden kann. Wie fein ich mir die Linie denken mag, eine Dicke hat sie stets, die zwar gleichfalls keine genaue ist, die aber in endlichem Verhältniss zur Länge der Linie stehen muss. Gehen daher meine Vorstellungen von der Linie aus, so wird der Punkt ein Stück der Linie sein, so lang wie die Dicke der Linie, und seine Dimensionen werden in endlichem Verhältniss zur Längeneinheit stehen. Denkt man sich den Punkt isolirt, so pflegt man ihn in der Zeichnung als dünne, kleine, kreisförmige Platte, im Raume als kleines Sphäroid sich vorzustellen. Doch ist die Form des Punktes, wie des Linienquerschnitts gleichgültig. Beide sind nur der Bedingung unterworfen, nach allen Richtungen hin beliebig kleine Dimensionen zu haben.

Der Folgerung, dass die Linie lückenlos aus Punkten zusammengesetzt sei, dessgleichen natürlich auch der Raum, kann die empiristische Auffassung sich nicht entziehen, von welchen einfachsten Vorstellungen sie auch ausgehen mag.

36. Der Grenzbegriff.

Nun, die eben an Linie und Punkt erläuterte empiristische Anschauung ergiebt sogleich die Vorstellung von der Grenze unendlicher Operationen und zwar mit einer Klarheit und Natürlichkeit, dass der Forschungstrieb dabei sich völlig beruhigt fühlen muss, und dass es einem mit Urtheil begabten Neuling

dem die Dinge auf empiristische Weise erklärt würden, nicht einfallen könnte, in einem endlosen Decimalbruch die Offenbarung des Unendlichgrossen und Unendlichkleinen zu erblicken.

Jeder der vom Idealisten (Art. 21) eingeschlagenen Wege, auf denen, wie er sagt, versucht werden könnte, das Dasein der Grenze zu beweisen, führt den Empiristen zum Ziele. Am raschesten vielleicht der erste.

Stellt $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ einen endlosen Decimalbruch vor, so wurde aus der für jedes p und q gültigen Ungleichheit $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$ geschlossen, dass die Endpunkte der sämmtlichen Längen

$$o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+r}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

in die Strecke s_p fallen, welche die Punkte $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ und $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$ verbindet.

Jede folgende Strecke s_{p+1} fällt in die vorige s_p. Nun ist die Gerade, die wir Einheitsstrecke nennen, in unserer Vorstellung ganz beliebig dünn, und ein Stück von ihr, so kurz wie sie dünn ist, fassen wir als Punkt auf der Strecke auf. Wie über alle Massen dünn wir die Gerade uns auch denken mögen, stets wird ein durch diese Dünne unmittelbar gegebenes p vorhanden sein, der Art, dass die Strecke s_p nicht länger ist, als wir die Gerade dünn uns vorstellen, und alsdann ist $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ mit der Genauigkeit, mit der wir augenblicklich denken, die Grenzlinie $(o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots)$. Diese Genauigkeit steht in unserem Belieben, und kommt in gleichem Maasse den rationalen, den irgendwie construirbaren irrationalen Längen und sonstigen durch endlose Decimalbrüche bestimmten Grenzen zu, zwischen denen Allen demnach nicht der geringste Unterschied besteht.

Das zweite vom Idealisten angeführte Beweisverfahren ist gleichfalls in meinen Augen völlig streng, weil ich die

Linie als aus Punkten bestehend ansehe. Es wird in jenem Beweis gezeigt, dass die Einheitsstrecke (0, 1) in zwei Strecken zerfällt, deren erste nur Punkte enthält, die von den von Null an abgetragenen Strecken o, α_1 ; $o, \alpha_1\, \alpha_2$; etc. einmal gedeckt werden, während die Punkte der zweiten nie gedeckt werden. Die Strecken stossen aneinander oder sind doch nur durch einen hypothetischen Punkt getrennt, der weder gedeckt noch nicht gedeckt wird. Entweder dieser Punkt, oder ein Punkt, der die Stelle enthält, wo jene beiden Theilstrecken aneinanderstossen, bildet sodann die Grenze.

Empiristisch ist hiemit der Grenzbeweis unstreitig geführt. Ich behaupte jedoch nicht, dass dies der uns natürliche Ideengang sei. Wie ich schon bemerkte, sind wir unbewusst, es wäre vielleicht richtiger zu sagen, geborene Idealisten. Mein Beweis ist die auf der flachen Hand liegende Folgerung aus Anschauungen, zu denen man durch Reinigung des Begriffssystems von unvorstellbaren Idealen gelangt, wodurch aber gerade dem von mannigfachen Idealen durchdrungenen Denkprocess ein höchst fühlbarer Zwang auferlegt wird.

In der Zeichnung z. B. stellt man sich die Grenze vor wie Art. 19 kurz angedeutet. Man denkt sich die Enden der vom Nullpunkt an abgetragenen Strecken o, α_1 ; $o, \alpha_1\, \alpha_2$ .. durch feine, kurze, quer durch die Strecke gezogene Striche bezeichnet. Diese Striche verdichten sich immer mehr, und sie müssen einmal aufhören, weil die Zeichenvorrichtungen schliesslich versagen, und man überhaupt nicht unbegrenzt viele Striche ziehen kann. Nun folgt von den Strichen $o, \alpha_1\, \alpha_2$ .. α_p durch eine kurze Strecke, die wir Nebelstrecke nennen wollen, getrennt, und das Ende der Punktreihe bildend, ein feiner scharfer Strich, etwas länger, wie die früheren Striche,

der die Grenze vorstellt. In der Nebelstrecke vor der Grenze treibt allerlei philosophischer Spuk sein Wesen. Hier spielen die berühmten Sophismen, sie ist es die der Idealist in die *quantitates infinitesimas* auflöst.

Die empiristische Zeichnung sieht etwas anders aus. Die Striche werden fortgesetzt, wenn auch die Zeichenvorrichtungen getrennte Striche nicht mehr erlauben. Die Striche fliessen dann in einander, zum Zeichen, dass ihre Breite grösser ist als die Entfernung der Strecke $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ von der Grenze. Es wird mit dem Ziehen fernerer Striche erst aufgehört, wenn ein Weiterrücken der Striche nicht mehr bemerklich ist, und die ferneren Striche stets durch dieselbe Stelle gezogen würden. Dies ist dann die Grenze.

37. Die Empiristik in den Elementen der höheren Analysis.

Wenn der Empirist seine Sprache von Worten und Wendungen freihalten will, die nur im Munde des Idealisten einen guten Sinn haben können, so wird er häufig ganz anders wie dieser sich ausdrücken müssen. Auch wird seine Darstellung der Grundbegriffe: Argument, Differential und dergl. vielfach von der des Idealisten abweichen. Ich werde nun zunächst in einigen Hauptpunkten die empiristische Ausdrucksweise kennzeichnen, sodann aber meine Auffassung von Argument und Differential und dergl. darlegen.

1. Vor allen Dingen, da es Unendlichkleines und Unendlichgrosses im Sinne des Idealisten für den Empiristen nicht giebt, so bedeuten diese Worte, falls er sich ihrer gelegentlich bedienen sollte, in seinem Munde nichts weiter als unbegrenzt klein oder gross, grenzenlos, endlos, unermesslich, und was dergleichen die Schranken für das Vordringen un-

serer Phantasie in einer gegebenen Richtung aufhebende Bezeichnungen mehr sind.

2. Statt von einer veränderlichen Grösse auszusagen, dass sie unendlich gross oder unendlich klein wird, zieht der Empirist vor, zu sagen, dass ihr, dem gegebenen Zweck angemessene, hinreichend grosse oder hinreichend kleine Werthe beigelegt werden.

3. Eine manchmal etwas heikle Frage des genauen Ausdrucks ist es, ob und wann man von einer veränderlichen Grösse, die für einen gewissen Werth ihres Arguments einen Werth a besitzt, aussagen darf: Sie wird für diesen Argumentwerth gleich a, oder auch sie geht in a über. Zweifellos und unter allen Umständen richtig ist es, schlechthin zu sagen: a ist für jenen Argumentwerth die Grenze der veränderlichen Grösse, und daher wird der Empirist auch in allen zweifelhaften und manchen unzweifelhaften Fällen nicht anders sich ausdrücken. Berechtigt ist der erstere Ausdruck dann, wenn die Function für den betreffenden Argumentwerth einen deutlichen Sinn und einen ohne Weiteres berechenbaren Werth hat, wie z. B. eine ganze rationale Function von x für irgend einen endlichen Werth von x. Aber wenn der Argumentwerth ein im Sinne des Idealisten unendlicher ist, wie für die Grenze 1 von $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\frac{1}{2^n}=f(n)$ der Werth von n, oder wenn der Ausdruck der veränderlichen Grösse für einen Argumentwerth sinnlos und unberechenbar wird, wie $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für $x=o$, so kann der Empirist nur die zweite Ausdrucksweise anwenden. Und hier wird seine Sprache am meisten von der des Idealisten sich unterscheiden, den seine Schlüsse dazu führen,

dass er sich correct auszudrücken glaubt, wenn er sagt: $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ wird genau gleich e, wenn x unendlich klein wird. (Art. 27). Vollends wird der Empirist die idealistische Abneigung gegen die reine Null nur bei der offenbar widersinnigen Anwendung dieser Vorstellung in der Rechnung theilen können, die Zusammenstellungen $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{0}$, etc. scheinen ihm eben so verkehrt, wie dem Idealisten. Allein er sieht nicht ein weshalb er die Null nicht ebensogut, wie Grössen als Werth in seinen Rechnungen verwenden sollte. Grenze ist sie doch oft genug. Uebrigens erstreckt sich die empiristische Vorstellung des beliebig Genauen natürlich auch auf die Null.

4. Das Argument oder die unabhängige Veränderliche.

Die empiristische Begriffsfestsetzung des Arguments heischt gewisse zartere Unterscheidungen, während das idealistische Argument allerdings eine viel einfachere Vorstellung ist. Idealistisch gestatten die veränderlich gedachte Länge und die numerisch durch die Einheit ausgedrückte Grösse, also die geometrische und die arithmethische Auffassung des Arguments eine unmittelbare gegenseitige Zuordnung (Art. 23), beide sind gleichberechtigt. Und wenn auch die lineäre Grösse der ursprüngliche Begriff ist, so kann man doch zu jeder Zeit bei der Begriffsfestsetzung des Arguments nach Belieben eine der beiden Auffassungen voranstellen. Empiristisch liegen die Dinge anders. Allerdings herrscht zwischen einer beliebig genauen Länge, die uns, gleichviel wie, zur Verfügung gestellt würde, und einem endlosen Decimalbruch, dessen Fortschreitungsgesetz gegeben ist, volle Gleichwerthigkeit. Denn angenommen natürlich, dass ich die beliebig genaue Länge

messen kann, so erlaubt mir das »beliebig« so viele Ziffern des endlosen Decimalbruchs hinzuschreiben, als ich wünsche, ganz als ob ich das Gesetz kennte. Dass mir das Gesetz Beziehungen zu andern Brüchen liefern kann, oder den Bau des in Rede stehenden Bruchs zu übersehen gestattet, berührt die Frage der reinen Grössen-Aequivalenz nicht. Ohnehin ist ja durch die »beliebig« vielen Ziffern das Gesetz ihrer Aufeinanderfolge bestimmt.

Aber wenn wir nicht blos eine feste Grösse uns auf die beiden Arten gegeben denken, als Länge und als numerisch ausgedrückten Längeneinheitstheil, sondern die Gesammtheit der zwischen zwei Grenzen eingeschlossenen Grössen, so stösst empiristisch die Aequivalenz zwischen geometrischer und arithmetischer Auffassung des Arguments auf Schwierigkeiten. Dass ich die ewig gesetzlosen Zahlen des Empiristen verwerfe, ist hier unerheblich. Allein folgende Ueberlegungen fallen zu Gunsten einer vorwiegend arithmetischen Auffassung des Arguments ins Gewicht.

Da ich mir keinen genauen, sondern ein beliebig wenig ungenauen Abschluss eine Länge denke, so würde ich von der geometrischen Vorstellung ausgehend auf sämmtliche Grössen zugleich die Ungenauigkeit übertragen. Wenn ich mir die Idealisirung der Einheitsgeraden beliebig weit getrieben denke, so sind dennoch alle ihre Theile, rationale und irrationale, mit der gleichen Ungenauigkeit behaftet, in der That sind also nur rationale Bruchtheile der Geraden, deren reducirte Nenner eine gewisse Grösse nicht übersteigen, vorhanden. Mithin könnte ich von allen möglichen Abschnitten $o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ nur diejenigen, welche eine bestimmte, wenngleich beliebig grosse Stellenzahl besitzen, als Grössenbild des Ar-

guments zur Grunde legen. Offenbar eine durchaus ungenügende höchst beschränkte Auffassung.

Um dem Argumentbegriff seine Allgemeinheit zu wahren, muss also entweder die Zahl mit ihrem Fortschreitungsgesetz den Einzelwerth des Arguments bilden, oder auch, was dasselbe besagt, die Theillänge der Einzheitsstrecke muss mit einer von der Vorstellung der gesammten Einheitsstrecke unabhängigen beliebig grossen Genauigkeit gedacht werden. Nur so erweisen sich die arithmetische und die geometrische Auffassung des Arguments auch empiristisch als gleichberechtigt.

Mag es hiernach dem empiristisch denkenden Analysten am bequemsten sein jene lästigen geometrischen Unterscheidungen auf sich beruhen zu lassen, und der numerischen Auffassung des Arguments den Vorzug zu geben: es darf nicht vergessen werden, dass sie nur das Proteron sein kann. Das Proton ist und bleibt die lineäre mathematische Grösse. Denn erst das Theilungsbedürfniss, insbesondere das Geschäft des Messens konnte die Zahl und folgeweise deren Bildungsgesetze erzeugen. Die Messkunst theilt zunächst die Einheit in gleiche Theile, heischt sodann die incommensurable Theilung der Einheit, um geometrisch anschauliche Beziehungen arithmetisch festzulegen, es entsteht der Begriff des Irrationalen und seiner Gesetze. Und die wissenschaftliche Verallgemeinerung und Zusammenfassung dieses Vorganges ergiebt schliesslich den Argumentbegriff.

Der Idealist ist scheinbar viel rascher am Ziele. Seine logisch berechtigte Gleichstellung des geometrischen und des arithmetischen Arguments überhebt ihn, könnte man meinen, ähnlicher Erwägungen, wie die vorstehend angestellten. Doch wenn er näher zusieht, wird er finden, dass sie ihm nicht geschenkt sind. Gerade die Gleichartigkeit der geometrischen

Theile der Einheit und die Ungleichartigkeit ihrer arithmetisch ausgedrückten Theile nöthigt auch ihn, die arithmetische Bedeutung der Argumentpuncte zu berücksichtigen. In der Geometrie und Mechanik hindert vorläufig Nichts, das Argument geometrisch aufzufassen, wobei die empiristischen Voraussetzungen nicht minder brauchbar sich erweisen werden, wie die idealistischen. In der Analysis aber öffnen sich Gebiete, für welche die blos geometrische Auffassung unzureichend ist, und wo dem Argument die Zahl zugesellt werden muss. Die Functionen, um die es sich hier handelt, gehören nicht mehr der Differentialrechnung an, deren Grundgedanken ich nun im empiristischen Sinne erklären werde.

5. Die empiristischen Grundprincipien der Differentialrechnung.

Dieser Calcül ist mehr als eine Methode, welche gewisse Classen von Aufgaben löst, er ist vielmehr eine feste durch keine andere zu ersetzende Denkform, welche das, was im Gebiet veränderlicher Grössenbeziehungen das Beständige ist, und von Unkundigen flüchtig bemerkt oder unklar gefühlt wird, in eherne Begriffe fasst und zu schärfstem Ausdruck bringt. Wer möchte bezweifeln, dass, wenn die Marsbewohner eine Analysis besitzen, sie der unsrigen in allem Wesentlichen gleichen muss! Ich will versuchen den Gedankengang, der zur Differentialrechnung führen muss, darzulegen.

Sie deckt sich in ihrem Ursprunge mit einer Eigenthümlichkeit unseres Denkens. Es ist eine alte Erfahrung, dass wir zusammengesetzte Vorstellungen in einfachere uns befriedigende zu zerlegen suchen. Der Anblick einer Linie von verwickelter Krümmung wird unsere Aufmerksamkeit eher erregen, also unsere Ruhe stören, als eine schlichte Gerade, an der weder

Krümmung noch vollends Veränderung der Krümmung dem Blick sich aufdrängen. Auch Kreisbogen, dann Ebene und Kugel lassen uns gleichgültiger wie andere Figuren in Ebene und Raum. Dergleichen geläufige Formen suchen wir in verwickelteren Vorstellungen wiederzufinden, und unser Verfahren dabei ist, dass wir diese in Gedanken zerstückeln, bis die Bruchtheile den Charakter der zusammengesetzten Vorstellungen verlieren und nahebei eine vertrautere einfache Erscheinungsform zeigen. Die Maassverhältnisse solcher zerstückelten Vorstellungen zu einander, welche in der mechanischen Naturwissenschaft als Elementargesetze der Erscheinungswelt das Ziel unseres Forschens bilden, finden in der Rechnung mit Differentialen ihren völlig entsprechenden Ausdruck. Sie ist die äussere mittheilbare Darstellung jener Denkform.

Doch lohnt es, die Grundbegriffe der Differentialrechnung von diesem Gesichtspunkte aus mit voller Schärfe zu entwickeln.

Das übersichtlichste und einfachste Abhängigkeitsverhältniss ist die blosse Proportionalität. Wenn man dem Laien den Functionsbegriff erklärt, so denkt er zunächst nur an gleichzeitiges Wachsthum oder gleichzeitige Abnahme und an gleichzeitige Verdoppelung, Verdreifachung etc. der verknüpften veränderlichen Grössen. Bezeichnet man die unabhängig gedachte Veränderliche mit x, die abhängige mit $y = f(x)$, irgend zwei zusammengehörige Werthepaare beider Veränderlichen mit x, y und x_1, y_1, so ist also y die einfachst denkbare Function von x, wenn stets

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$$

ist, unter a eine von x und x_1 unabhängige Grösse gedacht.

Die allgemeinere Auffassung des Functionsbegriffs erzeugt sodann naturgemäss das Streben, die einfachste Abhängigkeit in der unbeschränkten Abhängigkeit wiederzufinden, und nun ist es ein Ergebniss der geometrischen Anschauung, dass dies durch Zerstückelung, d. i. durch Betrachtung der Veränderung des Abhängigen innerhalb hinreichend kleiner Intervalle des Arguments erreichbar ist. Man verdankt dies Ergebniss der Methode von Descartes, Abhängigkeiten zu verbildlichen, und dem Tangentenbegriff, einer der ältesten Abziehungen des Menschen. Im Tangentenbegriff ist schon die Zurückführung der unbeschränkten Abhängigkeit auf die Proportionalität enthalten, und zwar auf Grund einer in den Lehrbüchern der Differentialrechnung häufig anzutreffenden Figur, die auf Barrow zurückzuführen sein möchte. Die Figur besteht aus der Curve $y = f(x)$, zwei zu den Abscissen x und x_1 gehörigen Ordinaten y und y_1 der Curve, einer Parallelen zur Abscissenaxe, die durch den Punct $x, y = f(x)$ gezogen ist, und endlich der Sehne $x,y; x_1,y_1$. Ist α der Winkel der Tangente an die Curve im Punkt x, y mit der xAxe, und setzt man $a = tg\alpha$, so ist

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x - x} = a + \varepsilon,$$

wo, da nach der geometrischen Grundvorstellung die Tangente die Grenzlage der Sehne ist, ε dadurch beliebig verkleinert werden kann, dass $x_1 - x$ und folgeweise $y_1 - y$ hinreichend klein angenommen werden.

Diese Beziehung enthält die Zurückführung der unbeschränkten Abhängigkeit auf die Proportionalität, und ist die Grundlage der Differentialrechnung. Sie ist geometrischer Natur, und muss es sein, denn das erste sind die Vorstellungen die analytischen Abziehungen kommen hintendrein.

Das vorstehend Erörterte bedarf etwas genauerer Darstellung, um die Principien die Calcüls darauf gründen zu können.

Erstens ist die Grösse $a = tg\,\alpha$ nur von x abhängig, da wir die Tangente an den Punkt x, y der Curve legten, und wir wir wollen dafür das gebräuchliche Zeichen $f'(x)$ einführen. Weiter haben wir uns lediglich auf die geometrische Anschauung berufen, die sich durchaus nicht auf alle Abhängigkeiten zu erstrecken braucht, ja gänzlich versagen kann.

Denn unter Abhängigkeit einer Grösse von einer anderen, dem Argument, oder unter einer Function in unbeschränktem Sinne ist zu verstehen, dass den einzelnen Werthen des Arguments Werthe der Function entsprechen, oder zugeordnet sind, zwischen denen nicht die geringste Verknüpfung besteht. Die Zuordnung kann aus dem Probleme folgen, mit dem wir uns gerade beschäftigen, oder von uns zu irgend einem Zwecke ersonnen sein. Dabei kann eine anschauliche Folge der Functionswerthe, ein zusammenhängendes Bild herauskommen, nöthig ist dies aber nicht, und nachweislich auch nicht immer der Fall.

Wir können demnach nur sagen:

Wie Anschauung und Erfahrung lehren, verhalten zahllose Abhängigkeiten sich so, dass

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(x) + \varepsilon$$

gesetzt werden darf, in welcher Gleichung $f'(x)$ keine anderen veränderlichen Grössen als $f(x)$ enthält, und ε durch hinreichende Annäherung von x_1 an x (x_1 kann $\lessgtr x$ sein) beliebig klein gemacht werden kann.

Die Functionen, welche diese Eigenschaft besitzen, sind

Gegenstand der Differentialrechnung. Es scheint zweckmässig ihnen einen besonderen Namen zu geben, und ich schlage vor, sie orthoide*) Functionen zu nennen. Die Bedingung der Orthoidie ist gewiss eine sehr einschränkende, da schon bei gewöhnlichen anschaulichen Curven anorthoidische Puncte auftreten, wie der Punkt $x = 0$ bei der Function $y = x \sin \frac{1}{x}$, wenn ihr für $x=0$, wo $\frac{1}{x}$ keinen Sinn mehr hat, der Werth Null vorgeschrieben wird. Doch ich komme weiter unten auf die Anorthoidie zurück.

6. Ueber die Rechnung mit Differentialen nach empiristischer und nach idealistischer Auffassung.

Hiemit habe ich dargelegt, was mir die eigentliche Grundlage der Differentialrechnung zu sein scheint. Die Differentialrechnung operirt nun wesentlich mit zwei Formen von Gleichungen, Gleichungen ohne Differentiale, statt ihrer nur Differentialquotienten enthaltend, und Gleichungen mit Differentialen. Vermöge der Grenzmethode folgen aus obigem Grundsatz strenge Gleichungen, wenn die Differentiale durch Dif-

*) Es ist dies die Functionenklasse, welche der Verfasser *(Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen etc., Borchardts Journ. Bd. 79, p. 27)* differenzirbare nannte. Er legt jenen neuen Namen dem Empiristen in den Mund, weil es ihm scheint, dass der tiefere erkenntnisstheoretische Sinn der in Rede stehenden Functionaleigenschaft auch in der Benennung wenigstens angedeutet werden müsse. In der That setzt das Verständniss des Ausdrucks: differenzirbar den Begriff des Differentialquotienten voraus, während die Orthoidie wie die Stetigkeit in erster Linie eine Anschauung ist. Erst die Ausdehnung auf den abgezogensten Functionsbegriff verleiht dem Begriff der Orthoidie den analytischen Charakter. Was den Ausdruck selbst anlangt, so würde er freilich correcter von εὐθύς statt ὀρθός abzuleiten sein, allein die bequemere Aussprechbarkeit verdient auch berücksichtigt zu werden.

ferentialquotienten ersetzt sind, die Orthoidie der in die Rechnung eingeführten Functionen vorausgesetzt. Die Newton'sche Methode der Fluxionen und der Lagrange'sche Derivirtencalcül sind, wenn man mit dem Begriff des Differentialquotienten sich abgefunden hat, durchsichtige Rechnungsarten, in denen keine weitere begriffliche Schwierigkeit lauert. Dagegen ist die Rechnung mit Differentialen noch immer nicht so fest und einwurfsfrei begründet, wie man das von einer zu so allgemeinem Gebrauch gelangten Methode verlangen dürfte, obschon, namentlich seit der berufenen Preisaufgabe der Berliner Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1784 *) unzählige Versuche in dieser Richtung gemacht wurden. Trotz alledem besteht der auch vom Idealisten betonte Nothstand heute noch, in meinen Augen eine der merkwürdigsten Erscheinungen in der wissenschaftlichen Literatur. Noch heute erscheinen in der »unfehlbarsten aller Wissenschaften« kaum zwei Lehrbücher hintereinander, die, wenn sie auf die Grundbegriffe näher ein-

*) Die Akademie betont, dass der Ehrenname *Sciences exactes* den mathematischen Wissenschaften erhalten bleiben müsse, obschon die ihnen so vielfach zu Grunde liegende *grandeur infinie* nach der Ansicht bedeutender Geometer einen Widerspruch enthalte. Daher wünscht sie: *Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématiques.* Den Preis erhielt 1786 Lhuilier aus Genf. Seine Preisschrift: *Exposition élémentaire des calculs supérieurs,* Berlin 1786, ist mir nicht zugänglich gewesen, doch habe ich wohl das Wesentliche seiner Ansichten entnehmen können aus J. K. F. Hauff's Zusätzen zu seiner Uebersetzung von L. Carnot's *Réflections sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal,* Frankfurt a. M. 1800. Lagrange's, welcher der Akademie bis 1787 angehörte, und Lhuilier's Auffassungsweise ist empiristisch. Es erhielt bei dieser Preisangelegenheit noch ein Ungenannter ein Accessit. War dies vielleicht der Idealist, oder hatte er nur weniger zutreffend als Lhuilier die doch wahrscheinlich maassgebende Ansicht von Lagrange ausgesprochen?

Der Verf.

gehen, nicht auf das Schroffste sich widersprächen. Hinsichtlich ihrer Begründung ist demnach die Lehre von den Differentialen seit Leibnitz, der bekanntlich auch zu keiner festen Ansicht gelangen konnte, kaum vorgeschritten.

Als Empirist lege ich mir die Dinge zurecht wie folgt:

Die Ausgangsgleichung

$$\frac{y_1-y}{x-x} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} = f'(x) + \varepsilon$$

schreibe ich, indem ich $x_1-x = dx$, $y_1-y = f(x_1)-f(x) = dy$ setze, ohne damit an der Bedeutung der Grössen x_1-x, y_1-y etwas zu ändern, so:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varepsilon,$$

woraus folgt

$$lim\, \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Aus $\frac{dy}{dx} = f'(x) + \varepsilon$ folgt weiter:

$$dy = dx\,[f'(x) + \varepsilon] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

eine, wie klein dx sein mag, auch dann durchaus richtige Gleichung, wenn man des empiristischen Genauigkeitsbegriff's eingedenk bleibt. Gleichviel ob ich unter dx eine Zahl verstehe, die eine Länge bedeutet, oder ob ich dx unmittelbar als Länge ansehe, denke ich mir den lediglich meinem Belieben unterstehenden Genauigkeitsgrad der Maasse stets so gross, dass die durch ihn noch zugelassenen Schwankungen der Einheitsvorstellung aller nachweisbaren Einwirkung auf die Formeln sich entziehen.

Aus der Gleichung I, die der Idealist (pag. 82) in der Form $\frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x) + \delta$ aufstellt, erhält er auf Grund seines Satzes von der Einflusslosigkeit des additiven Unendlichkleinen,

indem er $\triangle x$ und δ zugleich unendlich klein werden lässt, die idealistische Gleichung:

$$dy = f'(x)dx$$

in der also dx und dy unendlich kleine Werthe bedeuten. Diese Ableitung ist aber noch durch die Bemerkung zu vervollständigen, dass, falls zwei einander zugeordnete Grössen gleichzeitig die Grenze Null haben, wenn die eine von ihnen eine die Grenze Null habende Werthfolge durchläuft, wie die Grössen $\triangle x$ und δ des Idealisten oder meine obigen dx und ε, schliesslich einmal beide zugleich im idealistischen Sinne unendlich klein sein müssen. Denn gesetzt, die eine würde unendlich klein, und die andere nie, so müsste diese doch oberhalb einer noch so niedrigen endlichen Schranke bleiben, könnte also den Limes Null nicht haben. Diese Bemerkung gestattet mir, die empiristischen Gleichungen ohne Weiteres in idealistische umzuschreiben.

Aehnlich verhalten sich die Dinge bei dem Differential einer Function von zwei Variabeln $z = f(x, y)$. Man hat:

$$dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = [f(x + dx, y + dy) - f(x, y + dy)] + [f(x, y + dy) - f(x, y)].$$

Um auf die zwei Unterschiede rechts die Grundgleichung I der Differentialrechnung anwenden zu können, müssen wir voraussetzen, dass die Werthe $x, x + dx$; $y, y + dy$ in ein Intervall dieser Veränderlichen fallen, für welches $f(x, y)$ bei festgehaltenem y in Bezug auf x, und bei festgehaltenem x in Bezug auf y orthoidisch sich verhält.

Dann wird durch Anwendung der Grundgleichung I auf jene zwei Unterschiede:

$$dz = \frac{\partial f(x, y + dy)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy$$

wo ε_1 zugleich mit dx, ε_2 mit dy die Grenze Null hat. Ist

nun noch der Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x}$ eine stetige Function von y im Puncte x, y *), so kann man setzen:

---

*) Die Bedingung, dass der Differentialquotient $\frac{\partial f}{\partial x}$ nach y oder $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach x stetig sei, fügt eine neue Beschränkung zur ersten und unumgänglichen der Orthoidie von $z = f(x, y)$ in der Richtung der x und der y hinzu. Die Unsymmetrie dieser Bedingung legt zwar die Vermuthung nahe, dass die Orthoidie von $f(x, y)$ die Stetigkeit der Differentialquotienten zur Folge hat. Diese Vermuthung bestätigt sich jedoch nicht. Geometrische Betrachtungen, auf welche an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden kann, belehren uns darüber, dass eine in der Umgebung eines Punstes x_0, y_0 durchweg orthoidische Function $f(x, y)$ gleichwohl einen endlichen Unterschied $\frac{\partial f(x_0, y_0 + o)}{\partial x_0} - \frac{\partial f(x_0 y_0)}{\partial x_0}$ zulässt, sogar wenn der Differentialquotient $\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y_0}$ bei und in x_0 stetig ist.

Hieraus folgt, dass, um die Formel $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ für einen Punct abzuleiten jene Unsymmetrie nach x und y einen guten Sinn hat. Wenn z. B. der Differentialquoitient $\frac{\partial f}{\partial y}$ nach x unstetig ist, so muss die Anordnung nothwendig die im Text angegebene sein. Weiter folgt daraus, dass, wenn die Formel für alle Puncte eines Gebietes ohne Weiteres d. i. unabhängig von der bei ihrer Herleitung gewählten Anordnung gelten soll, folgende Voraussetzungen erfüllt sein müssen: Für jeden Punct muss $f(x,y)$ bei festgehaltenem x nach y, bei festgehaltenem y nach x orthoidisch, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ müssen resp. nach y und nach x stetig sein. Diese Bedingungen reichen aus, und man kann, wie bemerkt, durch geometrische Constructionen ihre Nothwendigkeit nachweisen.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich darauf aufmerksam machen, dass in den Lehrbüchern die Formel für die Differentiation von Functionen mehrerer Functionen:

$$\frac{df(u, v, \ldots)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots$$

in der Regel unbefriedigend begründet wird. Man setzt z. B.

$$\frac{df(u, v)}{dx} = lim\left\{\frac{f(u+du, v+dv) - f(u, v+dv)}{du}\frac{du}{dx} + \frac{f(u, v+dv) - f(u, v)}{dv}\frac{dv}{dx}\right\}.$$

$$\frac{\partial f(x, y + dy)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \eta$$

wo η mit dy unter jede Schranke sinkt. Es folgt:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \varepsilon_1 dx + (\varepsilon_2 + \eta) dy$$

Wenn zwischen den Differenzen dx und dy die Beziehung festgesetzt wird, dass ihr Verhältniss, während sie sich verändern, feste die Null ausschliessende Schranken nicht verlässt, so wird die Grösse $\varepsilon_1 dx + (\varepsilon_2 + \eta) dy$, durch dx oder dy dividirt, mit dx oder dy zugleich Null zur Grenze haben.

So folgen denn aus den Abhängigkeiten $y = f(x)$, $z = f(x, y)$, in deren zweiter x und y als von einander unabhängig anzusehen sind, die Differentiale:

$$dy = f'(x)dx + \rho$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy + \rho_1$$

wo $\frac{\rho}{dx}$, $\frac{\rho_1}{dx}$ mit dx zugleich die Grenze Null haben, wenn dx und dy in einem Verhältniss stehen, dass weder der Null sich unbegrenzt nähern noch einen endlichen Werth überschreiten kann.

Diesen strengen Gleichungen entsprechen die idealistischen

Wenn hierin dx sich gegen die Null bewegt, so folgen ihm du und dv zugleich, und der erste Bruch rechts hat daher nicht die Form, aus der ein Differentialquotient entsteht. Um die allgemeine Differentiationsformel abzuleiten, muss man von der im Texte streng bewiesenen Formel: $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy +$ einer Correction, ausgehen. Diese von der hergebrachten etwas abweichende Anordnung der Theorie unterliegt keinem Bedenken. Für die Differentiation specieller Functionen genügt die ohne Weiteres streng zu begründende Differentiation einer Function von einer Function. Der Ableitung der allgemeinen Formel sind alsdann nur die einfachsten Begriffe von partieller Differentiation voranzustellen.

$$dy = f'(x)dx$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Hier ist die Bedingung für das Verhältniss von dx und dy auch gültig. Denn falls von den Grössen dx und dy die eine unendlich klein in Bezug auf die andere ist, so fällt wegen des Satzes vom additiv Unendlichkleinen das mit ihr multiplicirte Glied einfach fort.

Die Analysis macht nun nicht, wenigstens im Allgemeinen nicht von den genauen Gleichungen in empiristischer Form Gebrauch, und es entspringen daraus keine Fehlrechnungen. Da dies für die Richtigkeit des idealistischen Gedankengangs zu sprechen scheint, so fühle ich mich doppelt verpflichtet, zu zeigen, dass und weshalb auch die ungenauen empiristischen Gleichungen, welche durch Weglassung der Correctionen ρ, ρ_1 entstehen, und die mit den idealistischen Ausgangsgleichungen gleichlauten, zu richtigen Resultaten führen müssen, so dass es der zufälligen algebraischen Zusammensetzung der genauen Gleichungen zuzuschreiben ist, wenn der Idealist aus seinen Voraussetzungen einen richtigen Calcül abzuleiten vermag.

Beschränken wir uns auf Gleichungen, die lineär in Bezug auf die Differentiale sind. Die Veränderlichen seien x_1, $x_2 \ldots x_n$, so wird, falls eine Differentiation vorliegt, zwischen den Differentialen $dx_1, dx_2, \ldots$, ähnlich wie oben gezeigt, eine Gleichung bestehen der Form $\Sigma a_p dx_p + \rho = o$, die also in den Grössen dx und ρ homogen ist, in welcher die Verhältnisse der dx zwischen die Null ausschliessenden endlichen Grenzen verbleiben, und das Verhältniss von ρ zu einem der dx mit diesem zugleich die Grenze Null hat. Ist z. B. eine Pfaff'sche Gleichung vorgelegt, so füge man ihr eine solche Correction ρ hinzu. Jetzt denke man sich beliebig viele solcher

Gleichungen zwischen Differentialen im empiristischen Sinne mit den zugehörigen Correctionen gegeben. Mit diesen Gleichungen stelle man algebraische Rechnungen an: Additionen, Multiplicationen, Eliminationen, Einführungen neuer Veränderlichen statt der x, Zerlegungen in Factoren, u. s. f. Das Ergebniss kann immer nur sein irgend eine Anzahl wieder in den dx und ρ homogener Gleichungen. Ich nehme an: ein solches System von Gleichungen bildet den Abschluss der Rechnung. Eine jede Gleichung besteht sodann aus zwei Theilen, den Gliedern, welche von den ρ frei sind, und denen, welche mit den ρ multiplicirt sind. Geht man zu den Differentialquotienten über, indem man die resultirenden Gleichungen mit einem der dx in der gehörigen Potenz dividirt, so wird in dem die ρ enthaltenden Theile jedes ρ durch ein dx dividirt sein, und da bei unbegrenzt abnehmenden dx die $\frac{\rho}{dx}$ die Grenze Null haben, so wird in der Gleichung mit Differentialquotienten der ganze von den ρ abhängige Theil wegfallen, gerade so, als ob wir ihn schon in den Ausgangsgleichungen fortgelassen hätten.

Diese einfache algebraische Bemerkung enthüllt das ganze Geheimniss. Weil die Ausgangsgleichungen homogen sind in den Differentialen und den Correctionen, sind es die Endgleichungen auch. Und wenn sodann zu den Gleichungen mit Differentialquotienten, d. i. zu den wirklichen Resultaten übergegangen wird, so fallen die Correctionen fort, die man demnach schon in den Ausgangsgleichungen fortlassen darf.

Wir zeigten dies nur in dem einfachsten Fall der in den Differentialen lineär zusammengesetzten Ausgangsgleichungen. Würden unter den Ausgangsgleichungen z. B. durch zwei-

malige Differentiation entstandene vorkommen mit zweiten Differenzen $d^2x_1, d^2x_2, \ldots$, so müsste, da diese zweiten Differenzen an der Grenze wie Quadrate oder Producte der ersten Differenzen sich verhalten, das gleiche Ergebniss sich herausstellen, allerdings nachdem man in Betreff der Correctionen das Entsprechende verfügt hat. Doch gehe ich auf diese Verallgemeinerungen, deren Gang leicht zu übersehen ist, nicht weiter ein.

Die vorstehende empiristische Begründung der Differentialrechnung soll dem Strengebedürfniss Genüge thun, nicht aber durch Ablenkung des hergebrachten Sinnes der Bezeichnungen verwirren, noch durch pedantische Mitführung von Correctionen den leichten Gang der Rechnung hemmen. Auch der Empirist wird $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ setzen, und wird in den Gleichungen mit Differentialen die Correctionen ρ fortlassen, wie es der Idealist thut. Doch wird er nicht vergessen, dass die Correctionen hineingehören, und dass die Gleichungen ohne sie nur Abkürzungen sind, wie z. B. $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$ etc. kurz für »$1 = lim\ n = \infty \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$« geschrieben wird, was, da der Empirist kein Unendlich zulässt, wiederum eine Abkürzung ist für: »1 ist der Grenzwerth, von dem sich $\Sigma \frac{1}{2^n}$ beliebig wenig unterscheidet, wenn dem n hinreichend grosse Werthe ertheilt werden«.

7. Ueber eine Mittelauffassung des Differentials.

Zwischen die Auffassung des Idealisten, der dx schlecht und recht unendlich klein sein lässt, damit aber die Idee von

etwas Ruhendem, unveränderlichen verbindet, und meine Auffassung, die dx endlich und hinreichend klein aber gleichfalls ruhend annimmt, schiebt sich noch eine dritte (pag. 83, 84 erwähnte) Auffassung, nach welcher, wie es gewöhnlich ausgedrückt wird, dx eine im Verschwinden begriffene Grösse (quantité évanouissante) ist, eine Grösse also, die sich dauernd verändert in der Richtung der Null. Diese Idee einer stets in Fluss befindlichen Grösse geht mir entschieden wider den Mann. Es widerstrebt mir in den Formeln Zeichen zu haben für Grössen, die erst wenn ich die Formeln ansehe, sich in Bewegung setzen und der Null zueilen, die sie indessen erst am Schlusse der Rechnung erreichen dürfen. So lange das Buch zu ist, herrscht tiefe Ruhe. Sobald ich es aufschlage, beginnt der Wettlauf aller mit dem d versehenen Grössen nach dem Ziele 0. Die reciproke Vorstellung des Unbegrenztgrossen (pag. 69) ist mir zwar weniger störend, weil sie nicht einem dauernden Zustand des Wachsens, wie der des Abnehmens der Differentiale voraussetzt, sondern Grössen bedeutet, die stets unermesslich Alles das überragen, was die Formeln in Beziehung bringen, allein ich ziehe doch vor, meine Darstellung in eine solche Form zu kleiden, dass ich nur für meine Zwecke hinreichend grosse Werthe brauche.

Dergleichen Vorstellungen oder richtiger vermeintliche Vorstellungen von Grössen, die beständig über alles Endliche (d. i. Vorstellbare hinaus) wachsen oder abnehmen, entspringen unklarem oder verschämtem Idealismus. Uebrigens, nicht gegen die zu bestimmten Zwecken angeordnete Bewegung der Grössen einer Formel wende ich mich. Wie häufig z. B. kommt es vor, dass untersucht werden muss, was aus Functionen wird, welche Grenze sie haben, wenn ihre Argumente

gewisse Werthfolgen durchlaufen! Ja wir selbst haben soeben als Endgleichungen der Rechnung mit endlichen Differentialen die Gleichungen zwischen den Grenzwerthen der Quotienten der Differentiale angegeben.

Nur unausgesetzt einem bestimmten Ziel sich nähernde Grössen scheinen mir eine starke Zumuthung an die Phantasie des Lesess zu sein.

8. Einige Bemerkungen über anorthoide Functionen.

Nicht die Anorthoidie in einzelnen Punkten ist der neueren Mathematik eigenthümlich, sondern die durchgängige Anorthoidie gewisser Functionen. Sie setzt entschieden die numerische Auffassung des Arguments voraus, weil durch sie formale Unterschiede der Argumentwerthe erzeugt werden, die in jeder kleinsten Strecke des Arguments wiederkehren. Z. B. sind die rationalen und die irrationalen Zahlen, die algebraischen Zahlen verschiedener Ordnungen und die transcendenten Zahlen verschiedener Entstehungsweise solche Unterscheidungsmittel der Argumentwerthe. Man kann sich denken, dass, wenn den unterschiedenen Argumentwerthen unterschiedene Functionswerthe in geeigneter Weise zugeordnet werden, in den kleinst denkbaren Intervallen des Arguments Werthunterschiede der Funktion entstehen, die nicht mehr dem Bild einer anschaulichen Curve entsprechen.

Den ersten Gedanken einer solchen Zuordnung hat vielleicht Lejeune-Dirichlet*) gefasst. Er beruft sich gelegentlich auf eine Function, die für rationale Werthe des

*) Crelle's Journ. Bd. 4, pag. 169.

Arguments irgend einen constanten Werth i, für irrationale einen anderen ϑ annehme. Riemann*) hat uns sodann ein Verfahren gelehrt, dergleichen Functionen zu bilden, welches darin besteht, dass man eine Reihe von Functionen addirt, die man immer häufiger gewisse Schwankungen oder Unstetigkeiten annehmen lässt. Hat man z. B. eine Folge von Functionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$, von denen die erste für die ganzzahligen Werthe des Arguments, die zweite für die ganzzahligen Vielfache von $\frac{1}{2}$, die dritte für die ganzzahligen Vielfache von $\frac{1}{4}$, u. s. f. springt, und man bildet die Summe $\lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) + \lambda_3\varphi_3(x) + \ldots$, wo die λ so gewählte Zahlencoefficienten vorstellen, dass die Reihe convergirt, so stellt die Summe vorstehender Reihe eine Function dar, die in jedem beliebig kleinen Intervall springt.

Namentlich drei Arten hierher gehöriger Functionen sind es, welche unser Interesse erregen: Durchweg unstetige Functionen, unter diesen insbesondere die gleichwohl integrirbaren, und stetige Functionen, die durchweg anorthoidisch sind, von denen wir zwar nicht das erste, wohl aber das merkwürdigste Beispiel Herrn Weierstrass verdanken**) Alle derartigen Functionen haben den gewöhnlichen Functionen gegenüber dies gemein, dass man sich keine Gesichtsvorstellung von ihnen bilden kann. Die Schwankungen in jedem beliebig kleinen Intervall entsprechen eben keinem ruhigen scharfen Bilde. Um so näher liegt der Wunsch, eine gemeinsame analytische Eigenschaft an ihnen zu entdecken. Es

*) Gesammelte math. Werke, pag. 228.
**) Borchardts Journ. Bd. 79, pag. 29.

scheint aber, als ob dies nicht leicht sei. Man könnte daran denken, den Inbegriff der neuen Functionen dadurch abzugrenzen, dass man alle Functionen hineinrechnete, die entweder selbst durchweg unstetig sind, oder deren beliebig hohe Differentialquotienten es einmal werden. Wenn man aber bedenkt, dass z. B. die Function $e^{-\frac{1}{x}} \sin\frac{1}{x}$ für $x = 0$ sammt allen ihren Differentialquotienten orthoidisch sich verhält, und trotzdem mit immer dichter werdenden Schwankungen der Null sich nähert, so begreift man, dass die Begrenzung des Gebiets der »gewöhnlichen« Functionen innerhalb des allgemeinen Functionsbegriffs keine scharfe sein kann, sondern dass hier, wie so häufig in der classificirenden Systematik, statt der gewünschten Grenzlinie eine unbequeme Uebergangszone besteht.

Während vor Leibnitz unter Function eine Potenz des Arguments verstanden wurde, entwickelte sich aus der Differentialrechnung die allgemeinere (Johann Bernoulli zugeschriebene Bedeutung) des Worts. Doch erst Dirichlet und Riemann haben ihm durch Hinweisung auf die anorthoide Abhängigkeit seine volle Allgemeinheit ertheilt.

36. Schlussbemerkung des Empiristen.

Ich läugne nicht, dass den kühnen Gedanken des Idealisten, und seiner offenbar folgerichtigen, wohlgefügten Lehre mehr ursprünglicher Reiz zu tiefster Forschung innewohnen mag als meiner nüchternen und entsagenden Auffassung der Dinge. Auch bestreite ich nicht, dass die Männer, welche unserer Wissenschaft ihre belangreichsten Gebiete erobert haben, vielleicht der Mehrzahl nach idealistisch dachten. Man braucht nicht auf die Leibnitz-Eulersche Epoche zu-

rückzugehen, vielmehr folgt z. B. aus Riemanns gesammter Ausdrucksweise und auch aus mancher Stelle seiner von ihm publicirten und seiner nachgelassenen Schriften, dass er Idealist, und zwar muthigsten Bekenntnisses, war. Die Wissenschaft aber, d. i. der Inbegriff von Meinungen, Anschauungen, Sätzen, welche allmählich zur Geltung gelangen bei der an der Forschung betheiligten, oder deren Ergebnisse mit Interesse verfolgenden Menge, die vielleicht durch ihre Anzahl die herkulische Geisteskraft einzelner Bahnbrecher aufwiegt, ja, deren Urtheil sogar um so unbefangener ausfallen möchte, je weniger sie von der im Vordertreffen herrschenden Leidenschaft ergriffen ist: die Wissenschaft, sage ich, wird die ihr zu Gute kommende Ausbeute verschiedenartigsten Strebens stets nach ihrem selbstständigem Ermessen sich verähnlichen, und das ihrem Wesen fremde rücksichtslos verwerfen. So nahm sie Kepplers Gesetze dankbar entgegen, mit seinem Gesetz über die Sonnenentfernungen der Planeten liess sie ihn stehen. So wird sie, dess bin ich überzeugt, bei ihrer Fortentwickelung alles Vorstellungsfremde aus der Grössenlehre ausstossen, und beibehalten nur was Vorstellung mit Vorstellung verknüpft. So scheint schon jetzt auf allen wissenschaftlichen Gebieten das täglich angeregtere Streben nach Festigung der Grundbegriffe eine wesentlich empiristische Richtung einzuschlagen, wenn auch zunächst nur unbestimmten Antrieben folgend, und nicht unter der Leitung einer wohldurchdachten und systematischen Anschauungsform. Lassen wir es bei den mathematischen Wissenschaften bewenden, so hat z. B. in der Analysis die empiristische Auffassung längst die phantastischen Ideen über Summirbarkeit divergenter Reihen überwunden, welche der Leibnitz-Eulerschen Epoche eigenthümlich sind, deren letzte Spuren freilich in

dieses Jahrhundert hineinreichen, ja noch heutzutage zu unserem Befremden hie und da bemerkt werden. In der Geometrie hat man den Raumbegriff, dieses höchst zusammengesetzte unser ganzes Denken durchdringende Anordnungsprincip der Wahrnehmungen und Vorstellungen auf unsere Wahrnehmungen selbst mit grösstem Glücke zurückzuführen begonnen. Allerdings widersprechen sich noch vielfach, wie ich bemerkte, die Ansichten über das Unendlichgrosse, das Unendlichkleine, die Irrationalen, das Differential, u. s. f., doch sobald einmal die Erkenntniss durchgedrungen sein wird, dass zum Aufbau der Mathematik das Endliche genügt, wird es um das Unendliche für immer geschehen sein, bei allen Kundigen wird es nur noch heissen: Den Bedingungen der Aufgabe entsprechend hinreichend Grosses oder Kleines.

IDEALIST.

39. Schlussbemerkung.

Wird es je dahin kommen? Doch bevor ich dem Zukunftsbild des Empiristen das meinige gegenüberstelle, habe ich über seine anorthoiden Funktionen Einiges zu bemerken.

Eine Function, deren Vorschrift lautet: Sie soll in den rationalen Werthen des Arguments einen, in den irrationalen einen anderen Werth haben, ist in meinen Augen nicht völlig bestimmt, oder sie ist es vielmehr nur durch das Vorhandensein eines Menschen. Es ist keine Vorschrift, welche die Function dem Inbegriff aller Argumente zuordnet. Man könnte sie nicht durch eine ideale Zeichnung dargestellt sich denken, wie eine durch ein vollständiges Gesetz gegebene.

Ich denke mir eine Argumentstrecke (0, 1) vorgelegt. Irgend einer Theillänge entspricht ein Functionalwerth, den geometrisch ein Punct bezeichnet. Was von der einen Theillänge gilt, gilt zugleich und mit dem nämlichen Recht von allen den unendlich vielen Theillängen der Argumentstrecke. So entsteht die vollständige Darstellung der durch ein Gesetz vollständig bestimmten Function. Ein solches vollständiges Gesetz ist aber das die Rationalzahlen von den Irrationalzahlen trennende nicht. Denn wie gross man die rationalen Nenner annehmen mag, es bleibt zwischen beiden Zahlenarten stets eine unausfüllbare Kluft. Dagegen sind vollständige Functionen jene vom Empiristen (Art. 37, 8.) erwähnten Reihen, welche anorthoide Functionen, oder Functionen anorthoiden Charakters darstellen, weil sie keinen Unterschied machen zwischen den Argumentwerthen, für welche die Functionswerthe zu bestimmen sind. Die unendlichvielen den unendlichvielen Argumentwerthen zugeordneten Punkte sind das geometrische Aequivalent dieser Functionen. Ich sage nicht Bild, weil in diesem Aequivalent etwas Unvorstellbares enthalten ist, das Unendlichkleine. Nehmen wir ein anorthoides Gesetz an, z. B. ein solches, das zwischen zwei beliebig nahen Argumentwerthen Wendepunkte der Function ergiebt, wie dies bei unbegrenzt oft wiederkehrenden Maximis und Minimis der Fall sein kann, und fragen idealistisch: Welches wird die Entfernung benachbarter Wendepunkte sein. Wie schon zur Genüge gezeigt, wäre unbegrenzt klein, eine falsche Antwort, denn dies Wort bezieht sich auf die Vorstellung, die wir uns bilden, nicht auf die unabhängig von uns vorhandenen Distanzen. Die Entfernungen der Wendepunkte sind unendlich klein.

Und so ist das geometrische Aequivalent

der anorthoiden Functionen gleichsam die geometrische Darstellung des Unendlichkleinen.

Für den folgetreu denkenden Idealisten, der, so weit dies möglich ist, zu Grunde legt die von dem Vorhandensein menschlicher Gehirne unabhängig gedachte Beschaffenheit der Dinge, der mithin die Vorstellungsfolgen »beliebig oder unbegrenzt« (gross, klein, genau etc.) mit unendlich, völlig abschliesst, erzeugt die anorthoide Function mit unerbittlicher Logik das Unendlichkleine. Beruhigt er sich nun dabei nicht, sondern forscht nach dem wahren Ursprung des Begriffs, so wird er bald auf den im idealistischen System verfolgten Gedankengang geführt, wonach das Unendlichkleine schon aus der Frage nach den Unterschieden der möglichen Längen, die kleiner sind als eine gegebene, sich ergiebt. Dagegen den empiristisch Denkenden, oder den, der sich über die letzten Grundbegriffe der Analysis überhaupt keine Gedanken macht, lehren jene Functionen nur, dass der Functionsbegriff seine endgültige Ausdehnung erhalten.

Werden die Idealisten einmal aussterben? Ich befürchte es nicht. Eines habe ich als Idealist vor dem Empiristen sicherlich voraus. Indem ich mein System für richtig erachte, brauche ich das seinige nicht als falsch anzusehen. Wenn der Empirist den Unterschied unserer Ausgangsvorstellungen bis zu der Gegenüberstellung: »ganz genau, beliebig genau« zuschärft, so kann es mich nur erfreuen, ihn mit seinem beliebig Genauen dasselbe erreichen zu sehen, wie ich mit dem ganz Genauen, da, falls ihm die Begründung der Analysis mit dem nicht vollständig Genauen gelingt, meine Ausgangsannahme des vollständig Genauen in seinen Ergebnissen eine Stütze findet.

Auch dass er zum Theil umständlicherer Auseinander-

setzungen bedarf, als ich, um in seiner Weise die Ausgangstheorien der Analysis zu erhalten, werde ich nicht zu meinen Gunsten auslegen.

Erstens kehrt bei der Fortsetzung der Untersuchung des Grenzbegriffs, die zum allgemeinen Convergenz- und Divergenzprincip führt, dies Verhältniss sich um. Hier sind es die idealistischen Beweise, die schliesslich die verwickelteren werden, da sie doch im Grunde genommen mehr verlangen, als die empiristischen, nämlich die volle Genauigkeit. Weiter aber ist es eine oft wiederkehrende Erscheinung, dass einfache scheinbar höchst einleuchtende Gedanken, die bei oberflächlicher Kenntniss das durchgreifende Anordnungsprincip eines wissenschaftlichen Gebiets zu bilden scheinen, bei eingehenderer Forschung als durchaus unzureichend sich erweisen, und schliesslich einer schwierigen und zusammengesetzten nun aber erst wirklich befriedigenden Theorie weichen müssen.

Aus anderen Gründen glaube ich nicht an das empiristische Zukunftsbild. Es muthet der Wissenschaft ihrem Wesen Widerstreitendes zu. Möglich wäre es schon, dass innerhalb der Wissenschaft eine Doctrin entstünde, die den Wahlspruch: nur von Vorstellung zu Vorstellung der empiristischen Denkbeschränkung zu einer Art officiellen Dogmas erhöbe, wie es ja innerhalb der Religionen sogenannte orthodoxe Theologien giebt, auch wo die Theologen selbst den verschiedensten Ansichten huldigen. Die Wissenschaft aber, d. i. der Inbegriff aller Strebungen des menschlichen Erkenntnisstriebes verwirft nur das offenbar Falsche. Die freie Forschung beruhigt sich erst vor der unzweideutigen Wahrheit, und giebt nur nachweislich widersinnige Probleme auf, wie das *Perpetuum mobile*. Was den Idealismus erzeugt, der Drang, die Grenzen des zur Zeit

Vorstellbaren zu überschreiten, kann von der Wissenschaft nicht verurtheilt werden, so lange nicht der menschlichen Forschung ihre nothwendigen Grenzen gezogen sind.

Giebt es deren, wird unser Expansionstrieb je seine Schranken erreichen? Angesichts der unabsehbaren Kette von jungfräulichen Forschungsgegenständen, die in die Fernen des psychischen Problems sich verlieren, könnte ich daran allerdings verzweifeln, dass der Menschheit Zeit gelassen werde, ihre Aufgabe zu erfüllen, nimmermehr aber daran, dass sie ihren idealen Strebungen im Wesentlichen treu bleiben wird.

In der Denkart der heutigen Mathematiker vermag ich überhaupt keine bestimmte Parteinahme, am allerwenigsten gegen die Idealvorstellungen zu entdecken. Wenn man im Allgemeinen sagen kann, dass es der kritische Sinn der encyclopädistischen Zeit*) war, der die idealistischen Irrthümer der Leibnitz-Eulerschen Epoche beseitigte, so hat aus diesen Anfängen eine endgültige Läuterung der mathematischen Grundvorstellungen sich nicht entwickelt. Allerdings beherrscht gegenwärtig, hervorgerufen durch das Vorbild der grossen Mathematiker dieses Jahrhunderts, das Bedürfniss nach Strenge der Beweise und nach sicherer Begründung der Theorien den mathematischen Geschmack, allein keine Spur zeigt sich davon, dass diese Bestrebungen bis zu systematischer Trennung der empiristischen und idealistischen Voraussetzungen vorgedruugen wären. Was der Empirist in diesem Sinne deuten könnte, die Begriffsfestsetzung des Dif-

*) Wenigstens hat D'Alembert, der Mathematiker der Encyclopädie, in einigen gegen den jungen Lagrange gerichteten Stellen seiner Opuscules (die Summirbarkeit divergenter Reihen anlangend) den Eulerschen Ansichten über Convergenz gegenüber ganz modern gedacht.

ferentials in einigen neueren Werken, ist wohl nur einer gewissen Abneigung gegen das Unendlichkleine zuzuschreiben. Dagegen tritt das Unendlichgrosse in der Geometrie beziehungsreicher denn je auf. Die eingehendsten neueren Untersuchungen über Grundbegriffe, wie der Raumbegriff, kommen dem Idealismus und dem Empirismus gleichmässig zu Gute und sind von diesem Gegensatze weder hervorgerufen noch beeinflusst worden.

Cap. II.

Schlussbetrachtungen über den Idealismus und den Empirismus und über den Grenzbegriff.

40. Verhältniss des idealistisch-empiristischen Gegensatzes zur bisherigen Auffassung der analytischen Grundbegriffe.

Hiermit schliesse ich die Plaidoyers des Idealisten und des Empiristen. Mein Ziel war, indem ich den verborgenen Ursprung zweier allgemein verbreiteter aber vielfach untermischt erscheinender Denkformen aufsuchte, sie von ihrem Ursprung bis zu ihren äussersten Consequenzen sorgfältig auseinander zu halten. Der Leser stelle sich also unter den Figuren des Idealisten und der Empiristen, wie ich sie vorzuführen versuchte, nicht allein gleich scharf und folgerichtig denkende, sondern namentlich vor keinem Ergebniss ihres Denkens zurückschreckende Männer vor. In Wirklichkeit haben nämlich die von ihnen verkündeten reinen Lehren weder in der Vergangenheit noch in der Gegenwart, schwerlich auch nur einen völlig bewussten und consequenten Vertreter gefunden. Weil die Forschung nicht bis zu den Wahrnehmungen und der elementaren Begriffsbildung zurückging, sondern das gemeinmenschliche Begriffssystem, wie es nun einmal beschaffen ist, mit seinem Gemenge aus wirklichen und Wortvorstellungen, unbesehen zu Grunde legte, entstanden Meinungen, eklektische oder richtiger opportunistische Deutungen der Grundbegriffe, aber es

kam zu keiner Theorie. Im besten Falle traten Mittelanschauungen an die Stelle des Leibnitz'schen Schwankens, welche aber der Schärfe und Sicherheit jener Hauptsysteme ermangeln. Ich glaube nicht, dass Jemand, der obige Seiten aufmerksam las, im Zweifel sein kann, zu welchen Ansichten im gegebenen Falle Empirist oder Idealist sich bekennen werden. Dagegen sind unter solchen Umständen die Urtheile der Vertreter von Mittelsystemen durchaus unerrathbar.

So zeigt sich bis auf den heutigen Tag eine Verwirrung in den Grundanschauungen, wie sie nur herrschen kann, aber stets auch herrschen wird, so lange das ordnende Princip eines Denkgebiets noch nicht entdeckt ist. Dass dies in dem Dualismus der Weltanschauung zu suchen sei, mag desshalb unbemerkt geblieben sein, weil man in der Regel nur eine Ansicht für richtig hält und dies natürlich die eigene ist. Der eine sieht die stetige Linie als aus Puncten bestehend an, dem anderen dünkt dies verkehrt. Dieser wird aber vielleicht vom Unendlichkleinen nichts wissen wollen, das Jener unbeanstandet unter seine Voraussetzungen aufnimmt. Unbefangenes Urtheil und der ernste Wille, bis zu voller Klarheit durchzudringen, müssen aber schliesslich zur Gegenüberstellung der Voraussetzungen idealistischen und empiristischen Ursprungs führen. Es werden hierdurch im Gewirr der zufälligen Meinungen zwei ragende Banner aufgepflanzt, um welche vermuthlich früher oder später die Mehrzahl der Denker sich schaaren wird. Vielleicht auch wird einst die Zahl der Unschlüssigen überwiegen, oder derer, welche solche Ueberlegungen scheuen, und mit einer Art von *sacrificium intellectus* die letzten Probleme auf sich beruhen lassen: die Inconsequenten aber, welche jetzt die ungeheure Mehrzahl bilden, werden nur noch unter den Unkundigen zu treffen sein.

41. Die neutrale Darstellungsweise der Functionentheorie.

Ist eine solche Mittelpartei, die zu keiner der beiden Grundanschauungen sich bekennen will, denn aber möglich, und welche Sprache soll sie führen? Wir werden sogleich diese wichtige Frage erörtern. Nachdem wir nämlich die zwei logisch möglichen Grundanschauungen entwirrt haben, wird es sich nun darum handeln, dies kritische Princip durch die Elementarbegriffe der Functionentheorie, so weit dies von Belang scheint, jedenfalls über die nöthwendig nur kurzen Andeutungen des Idealisten und des Empiristen hinaus zu verfolgen. Dabei ist unser wesentlicher Zweck die genaue Darstellung der Grundlehren, wobei eben nur einzelne Schlussweisen und Ergebnisse der idealistisch-empiristischen Kritik unterstehen. Welche Darstellungsweise sollen nun wir wählen, da wir doch von jetzt an allein das Wort zu führen beabsichtigen?

Die Kluft zwischen der idealistischen und der empiristischen Anschauung besteht thatsächlich. Sie ist zu tief und weit, als dass sie je durch gegenseitige Zugeständnisse ausgeglichen werden könnte. Die Gegensätze sind völlig unversöhnbar. Hat man nun in die beiden Anschauungsformen sich hineingedacht und die ihnen entsprechenden Schlussweisen sich zu eigen gemacht, so liegt der Wunsch nahe, die Grundlehren der Analysis nun auch von beiden Anschauungen aus in folgetreuer Weise durchgeführt und dargestellt zu sehen. Man könnte begehren, dass auf dem Titel der Lehrbücher der Infinitesimalrechnung fortan die Ankündigung zu lesen sei: »auf idealistischer« oder »auf empiristischer Grundlage« und erwarten, dass die Fortsetzung dieser Schrift den Anfang dazu machte.

Wir glauben Erspriesslicheres bieten zu können. Die allgemeinen Grundsätze, nach welchen ein Capitel der Grössenlehre idealistisch oder empiristisch darzustellen ist, sind vollkommen im Reinen, und wir haben jetzt ihre Anwendung im Einzelnen zu zeigen. Diese Aufgabe möchte aber eine einseitige idealistische oder empiristische Darstellung ausschliessen, oder doch ihren Nutzen in Frage stellen. Vor allen Dingen aber wissen wir uns ausser Stande, für eine von beiden Grundanschauungen den Sieg herbeiführen. Daher würden wir, selbst wenn wir uns für eines der beiden Systeme entschieden hätten, vorziehen, unserer Darstellung wennmöglich eine Form zu geben, welche sowohl den Idealisten wie den Empiristen befriedigte. Dann müsste übrigens auch dem Strengebedürfniss des Lesers, der den Grössenbegriff nur in der zweiten Abziehungsstufe besitzt, vollauf genügt sein. Aber eine wie beschaffene Darstellung kann dies leisten? Auf diese Frage giebt es nur eine Antwort:

Da eine Darstellungsweise, welche der Denkart sowohl des Idealisten als des Empiristen entspricht, nicht möglich ist, so muss eine solche aufgesucht werden, die nur aus dem sich zusammensetzt, was keiner der beiden Denkweisen widerspricht, wodurch der neutralen Darstellung folgende Beschränkungen auferlegt werden.

Ausser Gebrauch zu stellen sind sämmtliche Begriffe, welche nur einer der beiden Grundanschauungen angehören. Also zunächst die gesammte idealistische Metaphysik, das Unendlichgrosse und das Unendlichkleine, und was die weitere Untersuchung uns als idealistische Fictionen noch enthüllen wird. Wir dürfen, um den Widerspruch des Empiristen zu vermeiden, das Gebiet des Vorstellbaren nicht verlassen. Mit

der empiristischen Idee vom beliebig Genauen verfahren wir, wie mit den idealistischen Fictionen, in der neutralen Darstellung wird von ihr kein Gebrauch gemacht, vielmehr werden wir Begriffe, wie Grösse, Werth, Länge, Strecke, Intervall so verwenden, wie der Idealist es thun würde. Der Empirist kann sich dabei beruhigen, dass diese Ausdrücke *implicite* den Gegensatz enthalten.

Sonach werde ich, diese Beschränkungen einhaltend, rein empiristischer Ausdrucksweise mich bedienen*). Sie hat eben den Vorzug, von keinem Standpunkt aus anfechtbar zu sein, da sie nie Ausdrücke gebraucht, die andere als aus Wahrnehmungen abgezogene und auf Wahrnehmungen zurückführbare Begriffe bedeuten. Wenn sie durch Umschreibungen, die hie und da an Stelle kurzer idealistischer Bezeichnungen treten müssen, zuweilen etwas schleppend erscheinen mag, so dürfte es doch von Interesse sein, eine Theorie, in welcher gerade der Gegensatz beider Grundanschauungen sich besonders geltend macht, in einer von allem Idealen frei gehaltenen Sprache kennen zu lernen.

Was dagegen die logische Entwickelung einer solchen Theorie und die Durchführung ihrer Beweise anlangt, so ist sie, da wir die idealistische Grössenvorstellung nicht ausschliessen, wenn wir von Werthen reden, idealistisch anzuordnen. Denn es müssen Beweise, welche den an das völlig Genaue glaubenden Idealisten zufriedenstellen, a fortiori dem Empiristen genügen, der die Grössenbeziehungen nur beliebig genau sich denkt.

Also empiristische Sprache, idealistische Beweise. So segelt unsere Argo ungefährdet durch die kritischen Symplegaden.

*) Ausgenommen im letzten Artikel des V. Capitels.

42. Uebersicht über die Fortsetzung unserer Untersuchung.

Dieser Wahlspruch tritt in Kraft im letzten Artikel dieses Capitels, das von den Grenzen discreter Grössenfolgen handelt, und in den darauf folgenden drei letzten Capiteln über das Argument, die Function, und den Endverlauf der Functionen. Bei Feststellung seines Argumentbegriffs stiess der Empirist bereits auf eine Schwierigkeit, die er indessen unschwer beseitigte. Bei neutralem Eindringen in die Natur des Arguments wird offenbar, dass gerade hier der idealistisch-empiristische Dualismus von tiefster Wirkung ist, in deren Kreis sogar wissenschaftliche Fragen gezogen werden, die schwerlich bisher den Verdacht so weit zurückreichender Beziehungen erweckten. Natürlich beherrscht sodann der Gegensatz zwischen idealistischem und empiristischem Argument ebenfalls den Functionsbegriff, dessen Inhalt wir nun erst völlig zu erschöpfen im Stande sind, wobei wir übrigens, was von wichtigen Grundsätzen der allgemeinen Functionentheorie an unserem Wege liegt, nicht übergehen. Sorgfältiger Zergliederung unterliegt zum Schluss der »Endverlauf der Functionen« bei unbegrenzt wachsendem Argument. Zur Theorie dieses Endverlaufs gehört das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip, mit dessen Beweis wir die letzte Hand an den Grenzbegriff legen.

Ueberblicken wir den zurückgelegten und den noch zu verfolgenden Weg, so sehen wir, dass, wie bis jetzt im Wesentlichen der Grössenbegriff unser Vorwurf war, zu dessen Verschärfung die Decimalbruchgrenze als einfachster Fall des Grenzbegriffs herangezogen wurde, nunmehr der Grenzbegriff selbst in den Vordergrund tritt. Mit den Schlussartikeln dieses Capitels und den darauf folgenden Capiteln, deren In-

halt eben flüchtig scizzirt wurde, betreten wir jedoch mathematischen Boden. Wir suchen im Sinne jenes Dualismus die mathematischen Grundbegriffe, mit denen wir fortan zu operiren haben, zu reinigen und abzugrenzen.

So bleibt denn noch eine Lücke in dieser Untersuchung über die Urbegriffe des genauen Denkens auszufüllen. Wie beim Grössenbegriff, müssen wir auch beim Grenzbegriff versuchen im allgemein menschlichen Sinne seiner Entstehung nachzugehen und seinen natürlichen Inhalt festzustellen. Den wahrscheinlichen Ursprung so mächtiger Begriffsgebiete, ihr naives und ihr wissenschaftliches Stadium, ihre Paläogenese, wie man es kurz nennen könnte, zu erforschen, gewährt an sich grossen Reiz. Wohlthuend aber ist namentlich die Anschaulichkeit, die der Begriff gewinnt, wenn er durch das Zusammenwirken der betheiligten Wahrnehmungen gleichsam vor unseren Augen entsteht.

43. Die erste Entwickelungsstufe des Grenzbegriffs.

Die Paläogenese des Grenzbegriffs ist der des Grössenbegriffs im Allgemeinen ähnlich, doch ist sie selbstständig, und nur an den oberen Enden ihrer Entwickelung sind beide Begriffe verwachsen. In grossen Zügen dargestellt, liessen wir den Grössenbegriff, wie folgt, entstehen.

Wir begannen damit unter Allem, was innerhalb eines Gemeinsamen abgestufter Eindrücke fähig ist, den linearen Grössenbegriff als die Grundlage genauer Vergleichung und mathematischer Combination herauszusondern. Dieser lineare Grössenbegriff selbst bietet auf den ersten Blick zwei Grade der Abgezogenheit: zunächst ist es die naive, sodann die durch die Messkunst verfeinerte und den Zwecken mannigfacher Vergleichung angepasste Grössenvorstellung.

Allein wenn es bei den meisten begrifflichen Untersuchungen genügen wird, diese zwei Entwickelungsstufen beschrieben zu haben, die in der Entwickelung wohl aller der Wissenschaft dienstbar gemachten menschlichen Grundbegriffe unterscheidbar sind: der Grössenbegriff lehrt, dass es dabei sein Bewenden nicht zu haben braucht. Es gesellt sich zu ihm eine geschlossene Vorstellungsfolge, die ihm unzertrennlich anhängt, und die Forschung über ihn auf die ersten Wahrnehmungen und unseren Denkprocess hinweist. Dies ist die Zusammenfügung nicht einer Anzahl von Grössen zu einer Grösse, sondern die Zusammenfügung einer unbegrenzten Menge immer kleinerer Grössen ebenfalls zu einer Grösse, die Grenze genannt wird, kurz es ist der Grenzbegriff, oder doch ein Theil davon.

Um den Grössenbegriff im Sinne des Grenzbegriffs zu vervollständigen, und beide zu einer strengen Denkform zu vereinigen, ist eben eine dritte Stufe der Abziehung zu ersteigen, die erkenntnisstheoretische. Dies geschah in dem Meinungsaustausch zwischen Idealist und Empirist. Damit ist aber ersichtlich zugleich die Metaphysik des Grenzbegriffs erledigt, oder richtiger, durch die psychologische Untersuchung über den Grenzbegriff, welche dessen vorausgehende Stadien übersprang, wurde der Grössenbegriff abgeschlossen. Jedenfalls können wir die erkenntnisstheoretische Stufe des Grenzbegriffs als erstiegen ansehen, so dass uns nur noch übrig bleibt, einen Rückblick auf seine Entstehung zu werfen.

Analog also wie beim Grössenbegriff muss in der Entwickelung einer so allgemeinen Anschauungsform, wie der Grenzbegriff es ist, eine naive und eine wissenschaftliche Stufe

unterschieden werden. Seine Zusammensetzung ist eine höchst merkwürdige. Er besteht ursprünglich offenbar aus einer Verknüpfung von Abziehungen aus der äusseren und der inneren (seelischen) Erscheinungswelt. Die Grenze ist der erfahrungsmässige Abschluss eines Vorganges, dessen allmählige Veränderung sowohl im sinnlichen Eindruck, als in der Vorstellungsfolge, die dieser sinnliche Eindruck erzeugt, einen Abschluss nicht hat.

Das längere Zeit anhaltende Dunkel der Nacht ist die Grenze der abdämmernden Tageshelle, diese umgekehrt die Grenze des weichenden Dunkels. Das schliessliche Stillstehen eines pendelnden Gegenstandes, das Versiegen eines Flusses, andererseits der höchste Stand des schwellenden Flusses, die äusserste Wuth des Sturmes, der längste Tag, die längste Nacht im Jahr, kurz jedes Ende einer Veränderung, die kaum merklich vorschreitet, und in der dadurch erweckten Vorstellung endlos, unabsehbar scheint, dennoch aber erfahrungsgemäss einmal entweder vollständig aufhört oder einen äussersten Grad erreicht, sind Beispiele für den in Rede stehenden Grenzprocess.

Es vereinigt sich also durch diese elementaren Wahrnehmungen in der That eine seelische und eine sinnliche Erscheinung zu einer Anschauung.

Dieser Vorgang wird in's hellste Licht gesetzt durch ein berufenes Sophisma der griechischen Philosophie, dessen Nerv ist, dass es die beiden Erscheinungen trennt. Ich meine die Schlussform Zeno's der Eleaten, nach welcher gleichförmig Bewegtes keine Strecke durchlaufen, z. B. der abgeschossene Pfeil die Scheibe nicht erreichen kann*).

*) Der Zenonische Schluss, wie er allgemein bekannt ist, knüpft sich an seinen Wettlauf des Herkules und der Schildkröte. An dem

Der entsendete Pfeil muss von der zwischen Bogen und Ziel gelegenen Strecke nacheinander die Hälfte, drei Viertel sieben Achtel u. s. f. zurücklegen. So viele dieser Bruchtheile der Strecke er auch zurückgelegt haben mag, stets hat er deren noch eine unbegrenzte Zahl vor sich. Da er aber alle zurückgelegt haben muss, wenn er das Ziel erreichen soll, so kann er es offenbar nie erreichen.

Dieser Trugschluss kann auf zweierlei Weise entkräftet werden.

Man entgegnet entweder, dass die für das Zurücklegen der Theilstrecken $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... erforderliche Zeit ja in demselben Verhältniss abnehme wie die Theilstrecken, dass mithin die unbegrenzte Anzahl Theilpunkte $\frac{2^n-1}{2^n}$ in endlicher Zeit durchlaufen werde. Oder man wendet richtiger ein, dass die Eintheilung $\frac{2^n-1}{2^n}$ des Weges eine willkürliche Zurechtmachung ist, und dass der Pfeil in Wahrheit nach einander die 4 Viertel oder die 8 Achtel u. s. f. des Weges zurücklegt und zwar gleiche Bruchtheile in gleichen Zeiten. Von diesen beliebig dichten gleichentfernten Puncten sucht sich eben das Sophisma ohne in der Sache liegenden Grund eine besondere Reihe aus.

Solche Einwendungen widerlegen zwar die Conclusion des Sophisma's, aber sie erklären es nicht, sie decken nicht den Fehler des Schlusses auf. Er liegt tiefer.

Das Paradoxon besagt doch, dass, da der Pfeil in der That die Puncte $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, ... in indefinitum durchlaufen muss,

---

abgeschossenen Pfeil erörtert Zeno etwas Anderes. Obschon dies hier unwesentlich, sei bemerkt, dass diese Schlüsse ursprünglich keine bewussten Trugschlüsse sind, sondern zur Stütze der Zenonischen Philosophie dienen. (Vergl. Zeller, Die Philosophie der Griechen, I, Die Eleaten, Zeno).

er in unserer Vorstellung stets in der nämlichen Lage zu dieser Folge von Puncten verharrt, insofern er ihrer beständig eine unbegrenzte noch zu passirende Zahl vor sich hat. In diesem Verhältniss kann nie etwas sich ändern. Nun aber tritt der Pfeil plötzlich aus dieser Vorstellungsfolge heraus, ganz unvermittelt sitzt er in der Scheibe.

Hier also beruht das Befremdende, das Paradoxe, auf dem Gegensatz zwischen einer Vorstellungsfolge, die ihrer Natur nach unbegrenzt ist, daher einen Abschluss nicht allein nicht fordert, sondern gar nicht besitzt, und dem erfahrungsgemäss dennoch eintretenden Abschluss der Vorstellungsfolge.

Diese Combination von Vorstellungen, deren Sonderung die Form eines Sophisma's annimmt, verschmilzt durch Gewohnheit zu einer Anschauungsform, über die nicht weiter nachgedacht wird, die dem allgemein menschlichen Vorstellungssystem in Gestalt verschiedener Wortvorstellungen, als Grenze, Ende, Abschluss u. s. f. angehört, nicht anders wie das Unendliche, das Genaue, das Starre und andere Grenzvorstellungen, die in der Aussenwelt nicht nothwendig vorhandene Grenzen rein gedanklicher Vorgänge bedeuten, auf deren Vorhandensein wir aber schliessen, weil wir durch die Erscheinungswelt an Grenzen gewöhnt sind.

Doch ist hiermit nur ein Theil des naiven Grenzbegriffs besprochen. Es kommt noch etwas hinzu. Wir kennen auch endlosen Wechsel, abschlusslose Veränderung. Die Bewegung im Kreise braucht nie auf eine Schranke zu stossen, der Wechsel der Jahreszeiten und der Gestirne erscheint ewig. Also muss in jene Anschauungsform noch die eine Grenze zulassende oder fordernde Beschaffenheit der Aenderung aufgenommen werden.

Genaue Festsetzungen über diese Beschaffenheit wird man in der allgemein menschlichen Anschauung nicht zu finden erwarten. Doch unterscheidet das Gefühl Vorgänge wie den Wechsel der Jahreszeiten von solchen wo ein Aeusserstes sicher erreicht wird wie beim Wachsen eines Baumes: Est modus in rebus, sunt certi denique fines*). Daher wird man das Princip, dass eine nur wachsende oder nur abnehmende Grösse einer Grenze sich nähert, falls sie nicht alle Grenzen überschreitet, als dem Vorstellungssystem auch des naiven Menschen, wenn auch nicht in so präciser Form, angehörig ansehen dürfen.

Der naive Grenzbegriff hat somit im Allgemeinen folgenden Inhalt: Unzählige Vorgänge bestehen in Aenderungen, die wir nicht bis an ihr Ende zu verfolgen im Stande sind, weder durch Sinneswahrnehmung noch in Gedanken. Und doch haben sie ein Ende. Wie es erreicht wird, ist unserer Vorstellung aber völlig unzugänglich. Andere Vorgänge haben dagegen keinen Abschluss.

Und zweitens: Es liegen in der Art der Veränderung Bedingungen dafür, dass der Vorgang nothwendig eine Grenze hat.

Der Grenzbegriff zerfällt daher in zwei wesentliche Theile: Die Existenz der Grenze, sodann die Natur der Bedingungen, unter welchen eine Veränderung eine Grenze hat.

44. Der wissenschaftliche Grenzbegriff.

Dieser Begriff der also ursprünglich Abziehung sowohl aus inneren als auch aus äusseren Wahrnehmungen ist, wird

*) Horat. Satyr. I, 1, v. 106.

nun auf lediglich durch den Denkprocess erzeugte Vorstellungsfolgen übertragen, und so entsteht der wissenschaftliche Grenzbegriff. Er bezieht sich theils auf Grenzen von Folgen von Einzelwerthen, wie meistens in der Mathematik der Alten, z. B. beim Kreisumfang als Grenze von Polygonumfängen und auch bei den Archimedischen Quadraturen; theils ist die Grenze Abschluss stetiger Werthfolgen, wie die Tangente als Grenzlage der Secante, und die mannigfachen Grenzen der aus dem Tangentenproblem hervorgegangenen Differentialrechnung. Stets aber wird in die abstracte Grössenlehre aus dem naiven Grenzbegriff die Existenz der Grenze einfach und ohne Discussion hinübergenommen. Was wissenschaftlicher Erörterung unterliegt, ist allein die Beschaffenheit der Grössenfolgen, die eine Grenze zulassen, wobei es sich jedoch nur um praktische Regeln, um Criterien für die Convergenz unendlicher Operationen unter sehr beschränkenden Voraussetzungen und nicht um ein alle möglichen Grössenfolgen umfassendes allgemeines Princip handelt.

Nennen wir kurz asymptotische Werthfolgen solche, die einen »asymptotischen Werth«, d. i. eine Grenze besitzen, wobei nicht ausgeschlossen sein soll, dass die Werthfolge auch um den assymptotischen Werth schwankt, so möchte der natürliche Umfang des wissenschaftlichen Grenzbegriffs, wie folgt, festzusetzen sein.

Er setzt sich zusammen aus der idealistisch-empiristischen Grenzidee, namentlich den Beweisen, welche aus beiden Grundanschauungen für die Existenz der Grenze möglich einfacher asymptotischer Werthfolgen sich ergeben, sodann aus den nothwendigen Bedingungen dafür, dass eine gegebene Werthfolge asymptotisch sei.

So aufgefasst, war denn in der That bisher der Grenzbegriff bei der Aufgabe, welche die neuere Mathematik sich gestellt hat, ihre Grundlagen sicher zu stellen, noch nicht an der Reihe: der Nachweis des Vorhandenseins der Grenze gewiss nicht, wie genügend erörtert, aber, was auffälliger ist, auch nicht das über den asymptotischen Charakter einer Werthfolge entscheidende Theorem, welches ich das allgemeine Convergenz- und Divergenzprinzip nannte. So wenig Beachtung war ihm geschenkt worden, dass ich 1871 einen besonderen Fall des Prinzips (dass eine Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. convergirt, wenn der Cauchysche Ausschnitt $u_m + u_{m+1} \ldots u_n$ bei in Unbegrenzte zunehmenden m und n stets die Grenze Null hat) für eines Beweises bedürftig erklären musste *).

So wird denn mit dem im V. Capitel erbrachten Beweis des allgemeinen Convergenz- und Divergenzprincips der wissenschaftliche Grenzbegriff in dem von uns angegebenen Sinne abgeschlossen. Wir würden auch hiermit unsere allgemeinen Betrachtungen abbrechen, wenn wir nicht gewisser Bedenken uns erinnerten, die einst unsern Fortschritt hemmten, und deren, weil sie das Bild dieser begrifflichen Untersuchung vervollständigen, zum Schluss Erwähnung geschehen mag.

45. Ueber die Grenzen discreter und continuirlicher Werthfolgen.

Als ich erkannt hatte, dass die Grenze nicht die Evidenz einer unmittelbaren Wahrnehmung besitzt, habe ich kein mir zugängliches Mittel unversucht gelassen, um ihren Existenzbeweis zu führen. Und es wäre wahrhaftig ein denkwürdiger Fund gewesen. Doch vergeblich war alle Mühe, und die beiden Beweise des Idealisten Art. 21 nebst ihrer Widerlegung bilden

*) Mein Antrittsprogramm a. d. Freiburger Univers. pag. 2.

den ganzen brauchbaren Rest dieses Stadiums meiner Untersuchung, davon allerdings abgesehen, dass erst die Unbeweisbarkeit der Grenze das erkenntniss-theoretische Problem von der dritten Abziehungsstufe des Grössenbegriffs ergeben konnte.

Indessen so ohne Weiteres folgte dies Problem aus der Unbeweisbarkeit der Grenze noch nicht. Zunächst glaubte ich nun einen besonderen Grenzübergang einfachster Art aufsuchen zu sollen, aus welchem die übrigen Grenzen combinatorisch abgeleitet werden könnten. Und jetzt hemmte meinen Fortschritt die Meinung, dass die Grenzbildung aus discreten und die aus stetigen Werthfolgen wesentlich verschiedene Begriffe seien, so dass für jede von ihnen eine einfachste Form zu Grunde zu legen sei. Allenfalls sei die Grenze discreter Folgen als in der von stetigen Folgen enthalten anzusehen. Daher erregten zunächst viele Beweise, die sich mir für die Existenz der Grenze stetiger Folgen unter Voraussetzung der Decimalbruchgrenze darboten, mein äusserstes Misstrauen.

Nun aber machte ich folgende Beobachtung. Wenn ich unter Voraussetzung der Grenze einer besonderen möglich anschaulichen stetigen Folge die allgemeinen Sätze beweisen wollte, so enthielten die Beweise unter irgend einer Verkleidung unvermeidlich die discrete Grössenfolge. Sie war immer da, und so ergab ich mich schliesslich darein, diese Erscheinung als eine Eigenschaft unseres Denkens anzusehen, welches mithin nicht allein, wie bekannt, die Continuität selbst in sprungweise sich Aenderndes auflöst*), sondern auch die Grenze

*) Bei den Gesichtswahrnehmungen ist das ruckweise Drehen des Augapfels, welches beim Betrachten eines ausgedehnten Gegenstandes bemerkt wird, ein äusseres Zeichen der im Text erwähnten Eigenthümlichkeit des Denkens. Auch bei dem Aufmerken auf andere Sinnesempfindungen ist Aehnliches wahrzunehmen. In dem heulenden Ton der Sirene unterscheide ich stets einzelne Töne, die höchstwahrschein-

stetiger Vorgänge aus discreten Ruhepuncten des aufmerkenden Gedankens entstehen lässt: unstreitig zu Gunsten einer wahren Gleichartigkeit der successiven Vorstellungen. Denn die Grenze als feste Länge kann die gleichgeartete Endvorstellung nur von einer Folge ebenfalls fester Längen sein.

Ich sagte pag. 9, dass sobald einmal die Decimalbruchgrenze keine Dunkelheit mehr für uns hätte, der Bann gebrochen und die Analysis Herrin im Hause sein werde. Das bedeutet jetzt: der Satz von dem Vorhandensein einer besonderen discreten Grössenfolge, des Decimalbruchs z. B., soll vermöge gewöhnlicher Mathematik genügen, um die Hauptsätze über die Function im Allgemeinen und das allgemeine Convergenz- und Divergenzprinzip abzuleiten. Nach der obigen Bemerkung kann das nicht befremden, und den Beleg dafür liefern die folgenden Capitel. Indem aber hiernach nur die Grenze discreter Grössenfolgen als unbeweisbar übrig blieb, war ich auch unmittelbar vor die erkenntnisstheoretische Stufe des Grenzbegriffs gestellt. Denn das bis zur Decimalbruchgrenze concentrirte Problem musste die Frage erzeugen: Wenn die discreten Grössen, die eine Grenze haben sollen, von dieser ewig verschieden bleiben, wie können sie ihre Grenze bestimmen? Welche Beziehung zwischen ihren

---

lich durch Aufmerken in einem Moment sich einprägen und die Veränderung des Tons für eine kleine Weile überhören lassen. Es entsteht so durch das ruckweise Aufmerken und die zugleich periodisch wiederkehrende Ermüdung der Aufmerksamkeit, welche die erhaltenen Eindrücke eine Weile an der Herrschaft lässt, eine Unstetigkeit des Wahrgenommenen, und dieser Umstand ist vielleicht die physiologische Ursache unserer Neigung, Stetiges in sprungweise sich Aenderndes aufzulösen.

getrennten Werthen und ihrer Grenze ist vorstellbar? An sich ist eben keine vorstellbar, und so fällt man auf die Lösung, dass sie entweder schliesslich mit der Grenze zu einer Vorstellung sich vermengen (empiristische Anschauung), oder dass ihre Unterschiede dem menschlichen Vorstellungsgebiet schliesslich nicht mehr angehören können (idealistische Auffassung), womit denn das Problem endgültig erledigt ist.

Den Anwendungen zu Gute kommt der geschilderte Gedankengang, insofern eine gleichförmige Beweismethode für Grenzen, gleichviel ob stetiger Aenderungen oder discreter Werthfolgen, sein Ergebniss ist. Die Beweise werden in allen Fällen auf Grenzbildung aus discreten Werthen zurückzuführen sein, und zwar aus thunlich einfachen Werthfolgen, wie es die Decimalbrüche sind. So entsteht ein vielfach anzuwendendes Beweisverfahren, das ich numerische Construction nenne. Im folgenden Schlussartikel dieses Capitels werden wir das eben Angedeutete mit Beispielen belegen, nachdem wir vorher die numerischen Ergebnisse unserer bisherigen Untersuchung kurz zusammengestellt haben.

46. Vergleichung der Grenzen discreter Werthfolgen.

I. Hinsichtlich der Decimalbruchgrenze ist das Ergebniss der bisherigen Untersuchung Folgendes:

Setzt man

$$x_n = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n, \quad \alpha_p = 0, 1, 2, \ldots 9,$$

so gibt es stets eine Grösse x von solcher Beschaffenheit, dass $x - x_n$, von hinreichend grossen Werthen von n an, unter einer beliebig klein anzunehmenden Grösse bleibt.

Wir schreiben

$$x = lim_{n=\infty}\,(0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n) = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$$

und es ist

$$x - x_n = 0,0\,..\,\alpha_{p+1}\,\alpha_{p+2} \ldots < 10^{-p}$$

falls die α von der Stellenzahl $p+1$ an nicht alle $= 9$ sind. Sind sie es, so ist $x - x_p = 10^{-p}$.

Die Grenze x können wir idealistisch oder empiristisch uns denken, ohne irgend welchen Einfluss auf den Gang und die Ergebnisse analytischer Untersuchungen. Auch werden wir, wie Art. 41. näher begründet, diesen Unterschied auf sich beruhen lassen, ausser wo es gerade um ihn sich handelt. Sodann ist zu bemerken, dass bei den Anwendungen dieses Satzes das schliessliche, wenn auch noch so späte Inkrafttreten eines die Folge der α beherrschenden Gesetzes angenommen werden kann, dass diese Annahme aber für die allgemeine Giltigkeit der auf das Vorhandensein der Decimalbruchgrenze gegründeten Beweise keine Nothwendigkeit ist. Empiristisch nicht, weil wenn nur die α in's Unbegrenzte angegeben werden können, die Bestimmung der Grenze beliebig genau ist. Idealistisch nicht, weil wenn wirklich aus den α eine bis ins Unendliche gesetzlose Folge würde, ihre Grenze im idealistischen Sinne dennoch vorhanden ist.

Die Frage nach dem Wesen der Irrationalzahl und ihrer Beziehung zur Rationalzahl möchte durch jenen Satz ebenfalls erledigt sein. Um unseren Gedankengang, soweit er auf die irrationale Grössendarstellung Bezug hat, kurz zusammenzufassen, so wurde gezeigt, dass die Zahl, d. i. die sogenannte Rationalzahl zu entsprechenden Theilen der Einheitsstrecke (als Vertreterin der linearen Grösse) sich verhält wie Wort zu Begriff oder Vorstellung. Gleiches gilt aber auch von der Irrationalen, die man sich mit der Vorschrift, nach welcher

sie fortzusetzen ist, als gleichbedeutend zu denken hat. Auch dieser Vorschrift entspricht eine Grenzlänge, wie der Zahl ein rationaler Einheitsbruchtheil.

Die Irrationale ist also wie die Rationalzahl eine lineäre mathematische Grösse, und der Unterschied Beider besteht darin, dass die Irrationalzahl eine Grenzlänge von Rationalzahlen ist, daher allerdings zwischen ihnen ein Grenzübergang liegt. Allein einen wesentlichen Unterschied bedingt dies nicht. Denn unsere Vorstellung von rationalen und irrationalen Längen ist völlig gleichartig, sowohl idealistisch als empiristisch; es sind eben, wie gesagt, irgend welche Abschnitte einer lineären mathematischen Grösse. Nichts trennt sie mithin als ihre numerische Bestimmung, d. i. ihre zufällige Entstehung. Zufällig sage ich, weil dergleichen Bestimmungen auch unzählige Arten irrationaler Längen als unter einander ebenso verschiedenartig wie rationale und irrationale Längen erscheinen lassen müssten. So können Längen rational oder irrational in Bezug auf als irrational gegebene Längen sein, sie können z. B. Grenzlängen einer Folge von irrationalen Längen sein, u. s. f. Der einzige wirklich wesentliche Unterschied, der in der numerischen Bestimmung einer Grösse denkbar ist, betrifft die Gesetzlosigkeit oder Gesetzmässigkeit der Zahlenfolgen: Die gesetzlosen Folgen, falls man sie mit dem Idealisten für möglich halten will, sind zwar entschieden irrational, allein sie bilden nur einen Grenzfall des Irrationalitätsbegriffs. Wenn wir in diesem Werke auch noch genug mit den verschiedenen numerischen Bestimmungsweisen der Irrationalen zu thun haben werden, der Zahlbegriff selbst scheint mit dem Vorstehenden erledigt, und wird uns nicht weiter beschäftigen.

II. Ich zeigte im vorigen Artikel, dass der Grenzbegriff naturgemäss an Zahlenfolgen, d. i. discrete Grössenfolgen sich knüpft, weshalb nicht allein jede Grenze, wie leicht zu zeigen, als Grenze von Zahlenfolgen darstellbar ist, sondern der Nachweis hypothetischer Grenzen continuirlicher Vorgänge in den Elementartheoremen der Functionenlehre wahrscheinlich auch stets durch numerische Construction, wie ich dies Verfahren nannte, gelingen wird. Wenn wir also eine Gattung von Zahlenfolgen besitzen, die nachweislich jeder möglichen Grenze sich nähern können, so muss der eigentliche Nachweis des Vorhandenseins von Grenzen durch Zurückführung der Werthfolgen, welche eine Grenze besitzen sollen, auf Zahlenfolgen jener Gattung geliefert werden können. Mithin wird es zunächst unsere Aufgabe sein, unter allen solchen Gattungen von Zahlenfolgen diejenige aufzusuchen, welche uns möglich anschaulich, möglich geläufig ist. Mit der Aufstellung einer solchen Gattung jede Grenze ergebender Grössenfolgen werden wir in der That auf die einfachste und an besonderen Fällen ärmste Form zurückgegangen sein, an welche das idealistische Axiom vom Vorhandensein der Grenzen sich knüpfen lässt.

Es bietet sich zunächst dar die allgemeinste Folge rationaler nicht abnehmender Brüche mit zunehmenden Nennern:

$$\frac{z_1}{n_1}, \frac{z_2}{n_2}, \text{ etc.}$$

wo also: $z_1 < n_1$, $z_2 < n_2$, etc., $n_1 < n_2 < \ldots$, $\frac{z_1}{n_1} \leqq \frac{r_2}{n_2} \leqq \ldots$ sei. Dies ist eine Folge von nur zunehmend sich ändernden und stets kleiner als die Einheit bleibenden Strecken, die ihrer Entstehungsweise nach von einem hinreichend grossen

n_p an, nur noch um Grössen zunehmen können, deren Kleinheit unserem Belieben unterliegt. Diese Art der Zunahme ist zwar einfach genug zu erweisen, aber doch eben nicht ohne Weiteres augenfällig, so dass diese Zahlenfolge vor noch übersichtlicheren zurückstehen muss.

Wenn die Nenner $n_1, n_2, \ldots$ eine geometrische Reihe bilden, so dass also die Einheit in n_1 Theile, jeder dieser Theile sodann wieder in n_1 Theile, u. s. f. getheilt wird, so gibt es eine sehr übersichtliche Art der Zunahme der Zahlen, bei welcher auch das Zustandekommen einer Grenze den höchsten Grad von Anschaulichkeit gewinnt.

Vor allem ist jede Länge (oder Grenze) als Grenze einer solchen Folge darstellbar. Setzen wir $n_1 = \alpha$, und nehmen an als gegeben die Länge $L < 1$, so gibt es eine solche ganze Zahl $\alpha_1 < \alpha$, dass $\frac{\alpha_1}{\alpha} \leqq L < \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha}$ sei. Weiter gibt es eine ganze Zahl $\alpha_2 < \alpha$, so dass $\frac{\alpha_2}{\alpha^2} \leqq L - \frac{\alpha_1}{\alpha} < \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha^2}$ sei, u. s. f. bis $\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha^{p+1}} \leqq L - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} \ldots \frac{\alpha_p}{\alpha^p}\right) < \frac{\alpha_{p+1}+1}{\alpha^{p+1}}$.

Daher hat $L - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} \ldots \frac{\alpha_p}{\alpha^p}\right)$ den *Limes* Null. Dies ist namentlich, wenn man sich eine Figur dazu zeichnet, in die Augen springend.

Also wenn eine Operation $f(x)$ eine Grenze $y < 1$ hat, so muss sie auch als $lim \left(\frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} \ldots \frac{\alpha_p}{\alpha^p}\right)$ dargestellt werden können.

Es fragt sich noch, welche Wahl von α die zweckmässigste ist. Nehmen wir an $\alpha = 2$, so liefert dies wohl die hin-

sichtlich ihres geometrischen Bildes übersichtlichste Zahlenfolge. Was kann es Einfacheres geben als fortgesetztes Halbiren. Da auch die Grössen α_1, α_2 . ., die nur 0 oder 1 sein können, alsdann die kleinstmöglichen sind, so wird das an die Form

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \frac{\alpha_3}{8} \cdots$$

geknüpfte Axiom auch die kleinstmögliche Anzahl Folgen in seinen Bereich ziehen.

Dies sind unstreitig grosse Vorzüge des Leibnitz so sehr an's Herz gewachsenen dyadischen Zahlensystems, und man wird seiner Anschaulichkeit wegen bei Vorträgen an der Tafel sich seiner stets gern bedienen. Für die Darstellung im Druck möchte es aber zweckmässiger sein, $\alpha = 10$ anzunehmen, d. i. wie bisher geschehen, das Decimalsystem anzuwenden, welches arithmetisch weitaus vertrautere Vorstellungen in uns erweckt, wie das ungewohnte dyadische.

III. Den Schluss bilde, als Beispiel für die numerische Construction, der Nachweis der Grenze einer discreten Folge von nur in zunehmendem Sinne sich ändernden, nicht ins Unbegrenzte wachsenden Grössen, welches eine der wichtigsten und am häufigsten bei den Beweisen der Functionentheorie benutzten Grenzen ist. Es sei also:

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \ldots,$$

und diese Grössen x mögen unter einer festen Schranke bleiben, dabei aber nicht von irgend einer Stellenzahl an einmal alle gleich sein.

Erstens sei $\alpha_o + 1$ die kleinste ganze Zahl, welche die Grössen x_1, x_2, ... nicht übersteigen. Dann müssen sie einmal α_o übersteigen und es heisse ξ_o das erste der x_p, welches die Bedingung

$$\alpha_o < \xi_o < \alpha_o + 1$$

erfüllt. Alle $x_p > \xi_o$ erfüllen diese Ungleichheit gleichfalls.

Zweitens sei $\alpha_1 + 1$, wo $\alpha_1 < \alpha$, die kleinste Anzahl von Theilen $\frac{1}{\alpha}$ der Einheit, die von den Grössen der Folge $x_1 - \alpha_o$, $x_2 - \alpha_o$, ... nicht überstiegen wird. Diese Differenzen, die nach der ersten Festsetzung einmal positiv werden, müssen auch einmal $\frac{\alpha_1}{\alpha}$ übersteigen. Es werde mit $\xi_1 - \alpha_o$ der erste dieser Unterschiede bezeichnet, der die Bedingung $\frac{\alpha_1}{\alpha} < \xi_1 - \alpha_o < \frac{\alpha_1 + 1}{\alpha}$ erfüllt. Wir schreiben sie nach der gebräuchlichen Zahlenschreibweise:

$$\alpha_o,\ \alpha_1 < \xi_1 < \alpha_o,\ \overline{\alpha_1 + 1}.$$

Alle $x_p > \xi_1$ werden dieser Ungleichheit ebenfalls genügen.

Drittens sei $\alpha_2 + 1$, wo $\alpha_2 < \alpha$, die kleinste Anzahl von Bruchtheilen $\frac{1}{\alpha}$ von $\frac{1}{\alpha}$, d. i. von Bruchtheilen $\frac{1}{\alpha^2}$ der Einheit, die von den Grössen $x_1 - \alpha_o,\ \alpha_1$; $x_2 - \alpha_o,\ \alpha_1$; ... nicht überstiegen wird. Diese Grössen, die nach der zweiten Festsetzung einmal positiv werden, müssen auch einmal $\frac{\alpha_2}{\alpha^2}$ übersteigen. Es werde mit $\xi_2 - \alpha_o,\ \alpha_1$ der erste dieser Unterschiede bezeichnet, für den $\frac{\alpha_2}{\alpha^2} < \xi_2 - \alpha_o,\ \alpha_1 < \frac{\alpha_2 + 1}{\alpha^2}$ oder

$$\alpha_o,\ \alpha_1\,\alpha_2 < \xi_2 < \alpha_o,\ \alpha_1\,\overline{\alpha_2 + 1}.$$

Alle $x_p > \xi_2$ werden dieser Ungleichheit ebenfalls genügen. U. s. f.

Ich bemerke, dass der empiristische Beweis hiermit fertig ist. Denn da die Folge der α_o; $\alpha_o,\ \alpha_1$; etc. eine beliebig genaue Grenze hat, die man sich z. B. mit $\alpha_o,\ \alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_p$ erreicht denken kann, so werden die x nicht

um α^{-p} über die Grenze des Bruches $\alpha_o, \alpha_1 \ldots . \alpha_p$ hinauskommen. Da aber α^{-p} durch Vergrösserung von p beliebig verkleinert werden kann, so haben die x eine empiristische Grenze, die nicht um eine mit beliebiger Genauigkeit anzugebende Strecke von der empiristischen Grenze des Bruches $\alpha_o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ entfernt sein kann, also haben die x und die α_o; α_o, α_1; etc. die nämliche Grenze.

Idealistisch hat man das Bedürfniss, die Gleichheit der Grenzen genauer zu formuliren, so, dass ihre Unterschiede als unendlich klein erscheinen:

Die unbegrenzte Grössenfolge $x_1, x_2, \ldots .$ bestimmt eindeutig eine ebenfalls unbegrenzte Zahlenfolge $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ und es sei

$$X = \alpha_o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots in\ inf.$$

Wir fanden dass für jeden beliebigen Werth von p es eine kleinste Ordnungszahl r gibt, derart, dass

$$\alpha_o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < x_q < \alpha_o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \overline{\alpha_p + 1},\ q = r, r+1, \ldots$$

oder dass, wenn die linke Seite verkleinert, die rechte vergrössert wird:

$$X - \frac{1}{\alpha_p} < x_q < X + \frac{1}{\alpha^p}$$

sei. Lässt man also p ins Unbegrenzte wachsen, so wächst auch r mithin q über alle Grenzen, und der Unterschied $X - x_q$, der kleiner als $\frac{1}{\alpha^p}$ ist, sinkt unter jede Schranke, oder wird idealistisch unendlich klein. Folglich ist:

$$lim\ x_p = \alpha_o, \alpha_1 \alpha_2 \ldots = X.$$

Bei allen numerischen Constructionen kann auf solche Weise der empiristische Beweis früher als beendigt angesehen werd[illegible], wie der idealistische, und es wird genügen, dies einmal a[illegible]führlich gezeigt zu haben.

Die Decimalbruchentwickelung $\alpha_1, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ ist es, was wir unter numerischer Construction der Grenze $lim\, x_p = X$ verstehen. Der eben bewiesene Satz ist ein sehr specieller Fall des folgenden, dem er jedoch zu Grunde liegt: Falls zwei Folgen $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$ so beschaffen sind, dass ihre Unterschiede $x_p - y_q$ unter einer beliebigen Kleinheit bleiben, wenn p und q eine hinreichend grosse Zahl überschritten haben, so besitzt jede der beiden Folgen eine Grenze, und zwar haben sie die nämliche Grenze. Dieser Satz wiederum ist enthalten in dem IV. Satze des dritten Artikels des V. Capitels, braucht sonach auch nicht besonders bewiesen zu werden.

So nun vorbereitet, wenden wir uns zur Erörterung der engeren analytischen Grundbegriffe, des Arguments und der Function.

Cap. III.

Ueber das Argument.

47. Vorbemerkung und Uebersicht.

Empiristisch wie idealistisch ist ein besonderer Werth des Arguments eine von einem festen Anfangspunct bis zu einem beliebigen Endpunct erstreckte Länge, die sich stets durch die Längeneinheit mit Hülfe einer Zahl — im allgemeinen Sinne — d. i. durch eine Rationalzahl oder die Grenze einer solchen ausdrücken lässt, wesshalb wir gleich an der Schwelle der Theorie der Functionen die Freiheit uns ausbedingen, dass wir das Argument je nach dem augenblicklichen Bedürfniss oder auch nur Belieben als Längen-Ende, also als einen eine Entfernung bedeutenden Punct, oder als Zahl, also als numerisches Verhältniss zu einer Längeneinheit uns denken und Weiterem zu Grunde legen dürfen.

Wenn nun auch die geometrische Vorstellung den ursprünglichen Sinn des Arguments bildet, so haben die Operationen der Analysis es doch wesentlich mit seiner numerischen Bestimmung zu thun, und man braucht die Ausgangsvorstellung nicht stets sich gegenwärtig zu halten. Die Zahlenvorstellung tritt an die Stelle der Längenvorstellung als ihr Zeichen, wie beim Denken das Wort die Vergegenwärtigung der wirklichen Vorstellungen uns erspart, welchen Vorgang ich Art. 18 eingehender schilderte. Mögen wir sodann je

nach unserer Eigenart von der Grössenvorstellung des Arguments mehr oder weniger uns lossagen, und darunter eine Succession von Zahlenbestimmungen verstehen: völlig verdrängt wird die geometrische Grundvorstellung doch nicht. Sie beherrscht eben die Ausdrucksweise: Wir reden von einer Strecke, auf welcher die Argumentwerthe als Punkte vertheilt sind, theilen die Strecken in Theilstrecken, errichten auf den Puncten der Strecken Functionswerthe, u. s. f.

Soviel über den einzelnen Argumentwerth.

Auch wo es sich um die gleichzeitige Vorstellung einer Schaar von isolirten Argumentwerthen handelt, sind die Auffassungsweisen des Idealisten und des Empiristen nicht wesentlich verschieden. Beide denken sich geometrisch darunter eine Reihe isolirter, beliebig, ja unbegrenzt dichter Puncte. Denn die Grenze, welche empiristisch der Punctverdichtung gesteckt ist, dass nämlich die Puncte schliesslich einander berühren, kann durch Verfeinerung der Vorstellung beliebig hinausgeschoben werden. Ein tiefer Unterschied waltet dagegen zwischen ihren Anschauungen über den Inbegriff aller Argumentwerthe, die zwischen zwei Puncten möglich sind, das Zahlencontinuum, wie Hr. G. Cantor es nennt.

Die Untersuchung über die möglichen Gruppirungen der Argumentwerthe auf der Argumentstrecke, über deren zunehmende Verdichtung, endlich über den Inbegriff aller Werthe und dessen Beziehungen zu ärmeren Punctmengen: Dies sind die wesentlichen Bestandtheile der Theorie des Arguments, um die Hr. G. Cantor unstreitig grosse Verdienste sich erworben hat.

Meine Arbeiten über allgemeine Functiontheorie, namentlich über die Integrabilität und über den Gültigkeitsbereich der Darstellungsformeln betreffende Probleme haben mich längst

ganz ähnliche Wege geführt, wie ihn. Doch habe ich mich nur mit den Punctvertheilungen auf der Argumentstrecke und mit Methoden zur Darstellung der Irrationalzahlen befasst, während der Abzählbarkeitsbegriff nebst der Lehre von der relativen Mächtigkeit der Punctmannigfaltigkeiten Herrn Cantor durchaus eigenthümlich ist*).

Für die Gegenüberstellung der idealistischen und empiristischen Anschauungsweise, die meine gegenwärtige Aufgabe bildet, war es weder nöthig noch nützlich, den Gegenstand bis an die Grenzen des mir Bekannten zu verfolgen. So kommen die neuen Methoden zur Darstellung der Irrationalzahlen erst später zur Sprache. Nachdem ich den genauen Begriff von der Theilung der Argumentstrecke entwickelt, schicke ich vorauf die Lehre von den Punctvertheilungen, so zwar, wie sie mir sich dargeboten und mit meinen Benennungen (Art. 49 sqq.)**), und schliesse daran den hier einschlägigen Theil der Lehre von der Abzählbarkeit und von den relativen Mächtigkeiten der Punctmengen. Dies Alles ohne wesentlich auf die gegensätzlichen Grundanschauungen Bezug zu nehmen. Den letzten Theil der Capitels bildet sodann die Sonderung der Theorie in ihre Bestandtheile idealistischen und empiristischen Ursprungs.

---

*) Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, Borch. Journ. Bd. 77. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Borch. Journ. Bd. 84.

**) Um so mehr erachte ich mich berechtigt, jene Lehre so vorzutragen, wie sie aus den Bedürfnissen der Functionentheorie sich mir gleichsam von selbst ergeben, als ich Einzelnes schon hie und da publicirt, die Nothwendigkeit aber der allgemeinen Eintheilungen des Art. 49 Herrn Cantor mehr als Jahresfrist vor seiner beziehlichen Veröffentlichung (Leipz. Ann. XV) brieflich mitgetheilt habe. Den allgemeinen Begriff der Pantachie, der nicht der Speculation entsprungen, sondern recht eigentlich der Functionstheorie angepasst ist, betrachte ich mit der aus ihm entspringenden Dreitheilung als mein Eigenthum.

48. Die Theilung der Argumentstrecke.

Ein besonderer Argumentwerth bedeute also eine Länge, und sein Zeichen sei ein Punct oder eine Zahl, so ist gleichwohl das Argument, als Inbegriff seiner sämmtlichen Werthe gedacht, mit einer willkührlichen Länge nicht unbedingt zu identificiren. Zwischen Argumentstrecke und Länge besteht vielmehr ein Unterschied, der einen wesentlichen Theil des Argumentbegriffs bildet. Er tritt an den Tag bei der Theilung der Argumentstrecke.

Ein besonderer Argumentwerth x_1 kann die Argumentwerthe des Intervalls $(0, 1)$ auf folgende drei Arten theilen:

$$0 \leqq x \leqq x_1 \quad \text{und} \quad x_1 < x \leqq 1$$
$$0 \leqq x < x_1 \quad \text{und} \quad x_1 \leqq x \leqq 1$$
$$0 \leqq x < x_1 \ , \ x_1 \ , \ x_1 < x \leqq 1$$

Wenn daher zwei Vorschriften gegeben sind, von denen die erste im ersten Theile des Intervalls $(0, 1)$, die andere im zweiten gelten soll, so sind sie erst vollständig, wenn beigefügt ist, welchem von den drei Fällen die Vorschriften an der Berührungsstelle entsprechen, und im dritten Falle, was für den isolirten Punct x_1 gilt.

Wenn nun auch diese drei Fälle der Argumenttheilung mit der gewöhnlichen Auffassung vom Abschluss eines Vorgangs übereinkommen, indem sie auf das gebräuchliche inclusive und exclusive hinauslaufen, so bergen sie doch eine eigenthümliche Schwierigkeit, die zwar schliesslich nur eine Frage der Definition ist, aber wohl verdient ausdrücklich gehoben zu werden. Diese Schwierigkeit entsteht, wenn man jene drei Theilungsweisen als ein Verfahren ansieht, die Einheitsstrecke in Theile zu zerlegen. Sie besagen dann doch

nur, dass von den beiden Theilen der Einheitstrecke entweder der eine keinen Abschluss, wenigstens keinen vorstellbaren oder angebbaren, besitzt, oder dass Gleiches vom andern Theil gilt, oder dass beide ohne Abschluss sind, indem der Punct, der den Abschluss bilden sollte, von beiden Theilen abgelöst wird. Es entspricht dies nicht unserer gewöhnlichen Vorstellung vom Theilen, bei der wir mit dem Ganzen gleichartige, von ihm nur der Grösse nach verschiedene Theile entstehen sehen wollen. Wir müssen daher fragen: Wieso denkt man sich die Einheitstrecke nicht lieber in die Strecken $0 \leqq x \leqq x_1, x_1 \leqq x \leqq 1$ getheilt, statt in jene Strecken mit unvorstellbarem Abschluss. Hierauf ist zu antworten, dass diess bei einer wirklichen Theilung auch geschieht. Wenn man sich die lineäre Grösse wirklich zerlegt denkt, so entstehen mit dem Ganzen gleichartige Theile, wie dies ja zu ihren Kennzeichen gehört, und diese Theile wären, im Falle die Einheitstrecke das Getheilte ist, auf die eben angegebene Weise begrenzt.

Unser obiges Theilungsverfahren galt eben nicht der Länge an sich, sondern der Länge als Argument, der Argumentstrecke. Wir identificiren zwar einen einzelnen Argumentwerth mit einer Länge, allein eine Argumentstrecke bedeutet eine Folge nach ihrer Grösse geordneter Werthe, bei welcher Anordnung eine numerisch bestimmte Grösse nur einmal vorkommen darf, wie in der Reihe der ganzen Zahlen jede Zahl nur einmal vorkommt. Dieser Bestandtheil des Argumentbegriffs ist es, der mit Nothwendigkeit jene Theilungen ohne vorstellbaren Abschluss ergiebt. Ihr einfacher und deutlicher Sinn ist somit folgender.

Das Zeichen:

$$0 \leqq x \leqq x_1 , x_1 < x \leqq 1$$

bedeutet links sämmtliche von 0 an auf der Einheitsstrecke abgetragenen Längen die kleiner als x_1 sind, dazu die Strecke x_1 selbst, rechts sämmtliche von 0 an abgetragene Strecken, die grösser als x_1 sind. Das Zeichen:

$$0 \leqq x < x_1 , x_1 \leqq x \leqq 1$$

bedeutet links die von 0 an abgetragenen Strecken die kleiner sind als die Strecke x_1, rechts die Strecke x_1 und die grösseren Strecken. Endlich

$$0 \leqq x < x_1 , x_1 , x_1 < x \leqq 1$$

bedeutet links die Strecken die kleiner sind als x_1, in der Mitte x_1, und rechts die Strecken die grösser sind als x_1.

Die empiristische Anschauungsweise, nach welcher die Längen aus Puncten bestehen, liefert ein gutes Bild von diesen Abschlussarten der Argumentfolgen.

Sind keine besonderen Bestimmungen beigefügt, so soll im Folgenden eine Strecke oder ein Intervall des Arguments stets unter Einschluss der Endpuncte gedacht werden, und $a \leqq x \leqq b$ bezeichnen wir im Allgemeinen mit (a, b).

49. Erste und allgemeinste Eintheilung der Punctsysteme.

Die Vertheilung von Puncten in einem Intervall, wir denken hier stets an die Einheitsstrecke $(0, 1)$, kann vor allen Dingen zweifacher Art sein.

Einmal kann die Bestimmung, der eine Punctart unterliegt, so beschaffen sein, dass sie in jede noch so kleine Theilstrecke des Intervalls Puncte ihrer Art hineinlegt. Eine solche Punktvertheilung wollen wir pantachisch nennen, von

παντα χῆ, παντα χοῦ. Auch werden wir eine pantachische Punctvertheilung kurz eine Pantachie nennen.

Andererseits kann die Vertheilung der Puncte der Art sein, dass sie in keiner noch so kleinen Theilstrecke des Intervalls pantachisch ist. Diese Punctvertheilung soll apantachisch oder eine Apantachie heissen.

Dies sind zwei allgemeine Klassen von Punctvertheilungen mit denen wir uns sofort näher beschäftigen werden. Ich bemerke jedoch sogleich, dass sie nicht alle möglichen Punctvertheilungen erschöpfen, sondern Punctvertheilungen können auch weder pantachisch noch apantachisch sein, und sich nicht in eine endliche Anzahl pantachischer und apantachischer Strecken zerlegen lassen, pag. 188 Anm.

Ein einfaches und besonders lehrreiches Beispiel pantachischer Punctvertheilungen bieten die dyadischen oder dekadischen Punctbestimmungen. Wählen wir der Anschaulichkeit halber die dyadischen Puncte, deren Bestimmung ist:

$$Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n}$$

wo jedes der α Null oder Eins und n beliebig gross sein kann. Diese Bestimmung von Z ist pantachisch, weil, wenn ein noch so kleines Intervall an irgend einem Orte der Einheitstrecke gegeben ist, die α und n stets so bestimmt werden können, dass ein Punct Z in das Intervall hineinfällt. Bildet man sodann aus der dyadischen Bestimmung diese:

$$Z = lim_{n=\infty}\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n}\right),$$

wobei wie vorher jedes α Null oder Eins sein kann, so bedeutet diese Bestimmung den Inbegriff aller möglichen Werthe zwischen Null und Eins, da, wie Art. 46 gezeigt, man mit Werthfolgen der Form $\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4}$, etc. jedem Werth zwischen

Null und Eins beliebig nahe kommt. Will man sich diesen Inbegriff aller möglichen Werthe als Punctsystem auf der Einheitstrecke denken, so ist er natürlich κατ' ἐξοχήν pantachisch.

Von apantachischen Punctsystemen folgen unten mannigfache Beispiele. Wir wollen nun beide Hauptarten von Punctsystemen discutiren, mit den pantachischen anfangend.

50. Ueber die Eintheilung der pantachischen Punctvertheilungen.

Die beiden Pantachien des vorigen Artikels, welche das Beispiel der dyadischen Punctbestimmung ergab, legen uns eine wichtige Unterscheidung der pantachischen Punctvertheilungen, oder richtiger der pantachischen Werthmengen nahe.

Ich nehme an, es sei eine Bestimmung Z vorgelegt, die eine endliche beliebig grosse Anzahl Puncte liefert, von denen, wenn man sie durch geeignete Verfügung über die willkürlichen Grössen der Bestimmung vermehrt, schliesslich kein noch so kleines Intervall frei bleibt, so will ich diese Punctbestimmung eine unbegrenzte Pantachie nennen. Der Limes der unbegrenzten Pantachie, d. i. der Inbegriff aller möglichen Puncte, heisse vollständige Pantachie.

Neben diesen zwei extremen Klassen pantachischer Punctvertheilungen giebt es unzählige Pantachien die Zwischenklassen bilden, und für die wir, weil sie in der weiteren Theorie auftreten, einen Namen brauchen. Ich halte es, wie die Dinge liegen, für das Zweckmässigste, dies Bedürfniss zu befriedigen, indem wir alle Pantachien, die nicht unbegrenzt sind, unter einer Benennung zusammenfassen, und ich will sie unendliche Pantachien nennen. Hiernach ist die vollständige Pantachie zugleich eine unendliche Pantachie. Man erhält deren ferner, wenn man aus der vollständigen Pantachie fort-

lässt z. B. die Rationalzahlen, oder die dyadischen, decadischen oder irgendwelche unbegrenzte Pantachien oder Apantachien in beliebiger Anzahl. Auf diese Weise kommen Pantachien heraus, die nicht blos unbegrenzte sind, weil, wie bei Gelegenheit des Abzählbarkeitsbegriffs gezeigt wird (pag. 199), durch solche Fortlassung einer beliebigen Anzahl von Apantachien oder unbegrenzten Pantachien die vollständige Pantachie nimmermehr bis zur unbegrenzten Pantachie verringert wird. Ob noch unendliche Pantachien anderer Entstehungsweise vorhanden sind, darüber wissen wir zur Zeit Nichts. Der Ausdruck: unendliche Pantachie ist idealistischen Anschauungen entnommen. Empiristisch mag er als blosser Name geduldet werden.

51. Die apantachischen Punktvertheilungen.

Zu den apantachischen Punctvertheilungen übergehend, greifen wir aus ihrer reichen Mannigfaltigkeit die einfachsten und übersichtlichsten heraus.

An die Spitze stellen wir das System isolirter Puncte, das wir auch kürzer isolirtes Punctsystem nennen werden, darunter eine beliebig dichte Vertheilung von Puncten in endlicher Anzahl verstehend, die jedoch fest ist, und nicht wie die unbegrenzte Pantachie durch Verfügung über Parameter beliebig verdichtet werden kann. So entspricht dem Gesetz:

$$Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \ldots + \frac{\alpha_{10}}{2^{10}}$$

ein System isolirter Puncte, wenn für die α alle Werthcombinationen von Null und Eins gesetzt werden.

Das nächst zusammengesetztere Punctsystem entsteht, wenn wir uns ein System isolirter Puncte denken, die in der Nähe eines bestimmten Punctes sich mehr und mehr

und schliesslich unbegrenzt verdichten, wie die Puncte $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$, etc. bei Annäherung an den Punct $\frac{1}{2}$ sich unbegrenzt verdichten. Ein gutes Beispiel für dergleichen Verdichtungspuncte innerhalb eines übrigens isolirten Punctsystems bieten die Wurzeln von $sin\frac{1}{x}=0$ in der Umgebung des Punctes $x=0$. Solche Verdichtungspuncte erster Ordnung können in einem Intervall beliebig oft vorkommen, wie dies von den Wurzeln von $sin\frac{1}{sin\, a\, x}=0$ gilt, wenn a hinreichend gross angenommen wird.

Weiter können die Verdichtungspuncte selbst einem Puncte entgegen' unbegrenzt sich verdichten, wofür die Wurzelvertheilung von $sin\frac{1}{sin\frac{1}{x}}=0$ in der Umgebung des Punctes $x=0$ ein Beispiel ist. Solcher Verdichtungspuncte zweiter Ordnung können wieder unzählige in einem Intervall vorkommen, wie die Nullpuncte von $sin\frac{1}{sin\frac{1}{sin\, a\, x}}$ zeigen.

Auf diese Weise gelangt man allgemein zu Verdichtungspuncten $n$ter Ordnung, wie der Punct $x=0$ für die Nullpuncte des Kettensinus

$$sin\frac{1}{sin\frac{1}{\ddots\, sin\frac{1}{x}}},$$

falls das Zeichen sin darin $n$mal vorkommt.

Aus obiger Synthese der Verdichtungspuncte $n$ter Ordnung folgt rückwärts, dass, wenn man die sämmtlichen Verdichtungspuncte $n$ter Ordnung durch beliebig kleine Strecken in denen sie enthalten sind, ausschliesst, nur Verdichtungs-

punkte $n-1$ster Ordnung übrig bleiben, und wenn dies Ausschliessen der Verdichtungspuncte ordnungsweise absteigend fortgesetzt wird, bis kein Verdichtungspunct mehr vorhanden ist, so bleibt ein isolirtes Punktsystem übrig. Dies Ausschliessen durch Strecken kann, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, stets so geschehen, dass die Summe sämmtlicher zum Ausschliessen der Verdichtungspuncte verwendeten Strecken kleiner ist als eine gegebene beliebig kleine Strecke. Wir können solche Punktsysteme, wenn sie näher bezeichnet werden sollen, bis auf Verdichtungspuncte $n$ter Ordnung isolirte Punctsysteme nennen.

Wichtig ist, dass man aus diesen Verdichtungspuncten von Puncten zugleich Verdichtungspuncte von Strecken erhält. Zwischen irgend einem ersten Punct und dem z. B. nach rechts benachbarten wird eine Strecke gezeichnet, zwischen dem dritten und vierten nach rechts und dem zweiten und dritten nach links werden zwei weitere Strecken gezeichnet, u. s. f. So entsteht ein Verdichtungssystem beliebiger Ordnung von Strecken, die man ihrerseits mit irgendwelchen Punctsystemen besetzen kann. Denken wir uns z. B. das System der um den Verdichtungspunct der Nullpuncte von $sin\,\frac{1}{x}$ sich verdichtenden Strecken, und auf irgend einer ersten Strecke ein Punctsystem mit einem Verdichtungspunct erster Ordnung. Auf der nächsten Strecke in der Richtung des Punctes $x = 0$ ein Punctsystem mit einem Verdichtungspunct zweiter Ordnung u. s. f., so steigt die Ordnung der Verdichtungspuncte bei der Annäherung an den Punct $x = 0$ über jede Grenze.

Der Punct $x = 0$ ist demnach Verdichtungspunct unbe-

grenzt hoher Ordnung. Verglichen mit dem vorigen verhält dies Punctsystem sich so: Wir können es ebenfalls durch ausschliessende Strecken, deren Summe unter einer beliebig kleinen Grenze bleibt, auf ein isolirtes Punctsystem reduciren. Denn sobald wir durch eine beliebig kleine Strecke den Nullpunct ausgeschlossen haben, enthält das an beiden Seiten übrig bleibende Punctsystem nur Verdichtungspuncte endlicher Ordnung Der Unterschied zwischen diesem Punctsystem und denen mit Verdichtungspuncten $n$ter Ordnung ist der, dass, wenn wir den Nullpunct ausgeschlossen haben, die höchste Ordnung der übrig bleibenden Punctsysteme abhängt von der Länge der den Nullpunct ausschliessenden Strecke *).

Es ist klar, dass man mit einiger Phantasie dergleichen Combinationen in Menge finden kann. Bei einer solchen will ich noch verweilen, weil ihr Bildungsprincip von dem Obigen abweicht, und ein Punctsystem entsteht, welches sich nicht durch Ausschliessung von Verdichtungspuncten auf ein System isolirter Puncte reduciren lässt, und das eine wichtige Eigenschaft hat, wegen deren ich es construirt habe. In die Strecke $(0, 1)$ zeichne ich irgend eine Strecke (α, β) hinein, die keinen der Puncte $0, 1$ enthält. Es bleiben frei die Theile $(0, \alpha)$ und $(\beta, 1)$ der ursprünglichen Strecke. Mit diesen verfahre ich gerade wie mit $(0, 1)$. Ich zeichne in $(0, \alpha)$ eine Strecke (γ, δ) hinein die kleiner ist als $(0, \alpha)$ und deren Endpuncte freilässt, und unter den analogen Bedingungen zeichne ich in $(\beta, 1)$ die Strecke (ε, ζ) hinein. So bleiben von der ursprünglichen Strecke $(0, 1)$ übrig die Strecken: $(0, \gamma)$, (δ, α), (β, ε), $(\zeta, 1)$. In diese vier Strecken zeichne ich abermals

*) Durch die Streckenvertheilung können wir die Punctsysteme auf das Mannigfaltigste untermischen, z. B. Pantachien mit Apantachien, indem jene auf Strecken mit Verdichtungspuncten angebracht werden.

je vier kleinere hinein, und in die acht übrigbleibenden acht, u. s. f. ins Unbegrenzte. Es bilden die Endpuncte der successive hineingezeichneten Strecken das Punctsystem, welches ich meine, und die Strecken bilden ein von dem oben beschriebenen verschiedenes Streckensystem.

Dieses Punctsystem hat folgende wichtige Eigenschaft: Seine punctfreien Strecken können zusammengefügt gleich Eins und kleiner als Eins sein. In der That können $\overline{\alpha\beta} + (\overline{\gamma\delta} + \overline{\varepsilon\zeta}) +$ etc. den Limes 1 haben, falls z. B. $\overline{\alpha\beta} = \frac{1}{2}, \overline{\gamma\delta} = \overline{\varepsilon\zeta} = \frac{1}{8}$, etc. Andernfalls ist der Limes der zusammengefügten Strecken < 1. Hieraus folgt, dass, wenn man kleine Strecken um die Endpuncte der successiven Strecken $\overline{\alpha\beta}$, $\overline{\gamma\delta}$ und $\overline{\varepsilon\zeta}$, etc. abgrenzt, welche doch die sämmtlichen Puncte des Systems enthalten, und eine beliebig kleine Summe bilden, bei Verkleinerung dieser Summe der Unterschied zwischen ihr und der Einheitsstrecke nicht den Limes Eins zu haben braucht, sondern irgendwelchen Werth < 1 besitzen kann. Und dieser Umstand ist von Interesse in der Theorie des Integrals.

In der That, ausser den angeführten Apantachien, die sämmtlich Constructionen sind, welche der Prüfung oder der Verallgemeinerung von Sätzen dienen oder Selbstzweck sind, liefert die Analysis direct Punctvertheilungen, die Gewisses leisten, so namentlich die, welche ich das integrirbare Punctsystem nenne. Dies Punctsystem entspringt wie folgt aus dem Integralbegriff. Wenn eine Function sprungweise Aenderungen erleidet, die auf Pantachien ihres Arguments fallen, so hat sie gleichwohl ein bestimmtes Integral, falls alle solche Sprünge, die eine beliebig klein gedachte Grösse übersteigen, ein integrirbares Punctsystem bilden. Ich gehe auf diese Dinge in der Integrabilitätslehre genauer ein.

Die Bedingung für das integrirbare Punctsystem, welches wir N nennen wollen, lautet nun so: Wir theilen das Intervall $(0, 1)$ in die Strecken $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$. Zu jeder Strecke Δ, bis auf eine gehört immer nur einer ihrer Endpuncte, eine Strecke Δ enthält beide Endpuncte. Wir bezeichnen mit $\Delta'_1, \Delta'_2, \ldots \Delta'_m$ diejenigen Strecken Δ, welche Puncte von N enthalten, und setzen $\Delta'_1 + \Delta'_1 + \ldots + \Delta'_m = D$. Sodann denken wir uns die Strecken Δ kleiner werdend mit der Bestimmung, dass für die grösste unter ihnen eine untere Grenze nicht vorhanden ist. Wenn alsdann für diese grösste Strecke eine so kleine obere Grenze angegeben werden kann, dass D eine vorgeschriebene beliebig kleine obere Grenze erhält, so ist das Punctsystem ein integrirbares, aus welcher Bestimmung ein hier nicht weiter zu beweisender sie ergänzender Satz fliesst, der nämlich, dass wenn das System N integrirbar ist für irgend eine specielle durch unsere Bedingung gestattete Annahme über die Δ, es für jede solche Verfügung über die Δ integrirbar ist.

Aus den Angaben, die ich meinen obigen Beschreibungen von apantachischen Punctsystemen in Betreff der Summe der ihre einzelnen Puncte ausschliessenden Strecken hinzufügte, folgt, dass sie häufig integrirbar sind. Ja, wenn man nur die Systeme mit Verdichtungspuncten begrenzt und unbegrenzt hoher Ordnung untersucht, und findet, dass diese sämmtlich integrirbar sind, so kann man auf die Vermuthung kommen, der Begriff der apantachischen und der integrirbaren Systeme seien von gleichem Umfang, denn pantachische Systeme sind stets nicht integrirbar. Das letzte apantachische System welches ich beschrieb, lehrt nun, dass die Apantachie der weitere Begriff ist, indem es nur im Falle $\overline{\alpha\beta} + (\overline{\gamma\delta} + \overline{\varepsilon\zeta}) + \text{etc.} = 1$ integrirbar und in keinem noch so kleinen Intervall

pantachisch ist. Bemerkenswerth ist noch, dass das System keine isolirten Puncte besitzt.

52. Ueber allgemeine Eigenschaften unbegrenzter Vielheiten. Der Abzählbarkeitsbegriff.

Gegenstand der Theorie des Arguments sind vornehmlich unbegrenzte Vielheiten besonderer Argumentwerthe, wie die Rationalzahlen. Es erscheint daher nützlich in diese Mannigfaltigkeit mit Hrn. Cantor gewisse sichtende Begriffe einzuführen, welche unbegrenzte Vielheiten gleichsam zu messen gestatten, indem sie mit einer besonderen Vielheit verglichen werden. Ich meine die Begriffe von der Abzählbarkeit einer Vielheit, und von der relativen Mächtigkeit zweier Vielheiten.

Der Begriff der Abzählbarkeit einer unbegrenzten Menge ist eine Ausdehnung der Methode des Zählens. Das Abzählen einer endlichen Menge von Dingen besteht im Princip darin, dass man sie in eine Reihe anordnet, und die einzelnen Dinge den Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ der unbegrenzten Zahlenreihe beiordnet. Die Zahl, der das letzte jener endlichen Menge von Dingen beigeordnet wird, ist die Anzahl der Menge. Hat man eine unbegrenzte Menge von Dingen oder Elementen, und lassen diese Elemente sich successive den Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ so beiordnen, dass keines unter ihnen angebbar ist, das nicht einer Zahl der Folge $1, 2, 3, \ldots$ beigeordnet wäre, so heisst jene unbegrenzte Menge abzählbar, trotzdem sie unbegrenzt ist und keine Anzahl hat.

Natürlich ist jede einfache unbegrenzte Reihe von Grössen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in diesem Sinne abzählbar. Aber auch eine Doppelfolge:

$$a_{mn}; m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ist es. Man greift zunächst die Glieder heraus, in denen $m \leqq 10$, $n \leqq 10$, und ordnet sie der Folge 1 bis 100 bei. Dann greift man die Glieder heraus in denen $m \leqq 100$, $n \leqq 100$, lässt die schon angeordneten fort, und ordnet den Rest der Zahlenfolge 101 bis 10000 bei, u. s. f. So ist überhaupt jede vielfache Folge:

$$a_{m_1 m_2 \ldots m_n}, \quad m_p = 1, 2, 3, \ldots$$

abzählbar. Man wird wieder zuerst die 10^r Elemente hintereinander schreiben für die $m_p \leqq 10$, sodann die $100^r - 10^r$ Elemente, bei denen m_p 100 nicht übersteigt, und unter denen die schon angeordneten nicht wiederholt werden, u. s. f.

Diese Beispiele erläutern den Abzählbarkeitsbegriff im Allgemeinen, es handelt sich bei ihnen nur um die Zuordnung, da man unter den Elementen der Vielheit Beliebiges sich denken kann. Wir wenden den Begriff nunmehr noch an auf eine sehr allgemeine Form analytischer Zahlenbestimmung, sodann auf die Apantachien des Art. 51.

Man denke sich folgende Zahlenbestimmung

$$Z = \varphi(m_0, m_1, \ldots m_n, n)$$

wo jedes der m aus einer beschränkten oder einer unbeschränkten Menge ganzer Zahlen beliebig entnommen sein, sodann n fest oder unbegrenzt gross sein und φ für eine Bestimmung der m und n nicht blos eine Zahl, sondern z. B. eine von n abhängige Anzahl von Zahlen vorstellen kann. Dies Symbol bedeutet vielerlei Zahlenarten. Es steckt darin die eben betrachtete mehrfache Grössenfolge:

$$Z = a_{m_1 m_2 \ldots m_n}, \quad m_p = 1, 2, 3, \ldots$$

Sodann sind darin enthalten die Pantachien sämmtlicher Rationalzahlen:

oder:
$$Z = \frac{m_1}{m_2},$$
$$Z = m_0 + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_n},$$
und der arabischen Zahlenarten:
$$Z = m_0 + \frac{m_1}{\beta} + \frac{m_2}{\beta^2} + \ldots + \frac{m_n}{\beta^n},\ m_p = 0, 1, 2, \ldots \beta - 1$$
Weiter die Pantachie sämmtlicher algebraischen Zahlen überhaupt, falls nämlich Z die reellen Wurzeln der Gleichung
$$0 = m_n + m_{n-1} z + m_{n-2} z^2 + \ldots m_0 z^n$$
vorstellt, und unzählige andere Zahlenarten.

Alle dergleichen Zahlenarten sind abzählbar. Man ordne zuerst in eine Reihe alle Zahlen
$$Z = \varphi(m_0, m_1, \ldots m_n, n)$$
in denen der Modul keiner der Zahlen $m_0, m_1, \ldots m_n, n$ 10 übersteigt, sodann unter Ausschluss dieser die Zahlen Z, für welche die Moduln von $m_0, m_1, \ldots m_n, n$ nicht grösser sind als 100, u. s. f. und erhält auf diese Weise eine Succession, in welcher jede besondere Zahl der Bestimmung Z einmal zum Vorschein kommt.

Offenbar ist jede unbegrenzte Punctmenge abzählbar, wenn sie bei ihrer Vermehrung stets endlich ist. Wir haben zwei Bilder vor Augen: Die Vorschrift, nach welcher die Punctmenge ins Unbegrenzte vermehrt werden kann, und die Punctmenge selbst in irgend einem, aber stets in einem festen Stadium. In diesem Stadium ordnen wir ihre einzelnen Puncte in irgendwelcher Reihenfolge der Folge $1, 2, 3, \ldots N$ bei. Nun denken wir uns die Punctmenge nach ihrer Vorschrift

beliebig vermehrt. Die hinzugekommenen Puncte ordnen wir der Folge $N+1, \ldots N_1$ bei, u. s. f.

Eine solcher Art anwachsende Punctmenge ist also ohne Zweifel abzählbar. Betrachten wir unter diesem Gesichtspunct die Apantachien des Art. 51. Sie können abzählbare Punctmengen nur sein, wenn ihre endliche Vermehrung nicht durch Bildung von Grenzen von Punctmengen unterbrochen wird. Es handele sich beispielsweise um einen Verdichtungspunct zweiter Ordnung, d. i. um einen Punct p, dem sich Puncte p' unbegrenzt nähern, die selbst Verdichtungspuncte aber von isolirten Puncten p'' sind. Man könnte — idealistisch — diese Vielheit so auffassen, dass man damit anfinge die ganze Punctmenge p'', die sich einem Punct p' nähert, einzurechnen, und dies successive bei der ganzen Folge der p' wiederholte. So würde nach und nach eine unendliche Menge zur anderen addirt werden, und die so entstandene Vielheit könnte ersichtlich nicht in die Form einer Reihe gebracht werden.

Indessen ist diese Auffassung von Punctvielheiten in der That nur idealistisch zulässig. Will man von den idealistischen Grenzen absehen, so kann die unbegrenzte Punctmenge, welche den Verdichtungspunct zweiter Ordnung umgiebt, auf verschiedene Weise ihre Bestimmung finden. Es ist die Vielheit p'' zwischen zwei Puncten p' unbegrenzt gross, und die Vielheit p' ist es bei der Annäherung an p auch. Man hat also eine endliche Zahl m von Puncten p' und m endliche Zahlen n von Puncten p'' in den Intervallen der Puncte p', und hat m sowohl wie die n ins Unbegrenzte wachsen zu lassen. Dies kann natürlich auf sehr verschiedene Weise geschehen. Die Zahlen m und n können z. B. abwechselnd oder gleichzeitig wachsen. Immer aber wird dies Wachsen so ein-

gerichtet werden können, dass von der geometrisch gedachten Punctvielheit kein Punct zurückbleibt, sondern dass die mit m und den n anwachsende Punctmenge schliesslich jeden besonderen Punct des Verdichtungspunctsystems zweiter Ordnung in sich aufnimmt, und dadurch wird es ein abzählbares.

So sind die sämmtlichen Punctvielheiten geometrischer Bestimmung des vorigen Artikels beschaffen. Auch ist es nicht nöthig, dies hinterher zu zeigen, vielmehr ist die Abzählbarkeit offenbar mit ihrem geometrischen Werden verbunden, da die wachsende Punctmenge niemals durch einen Uebergang zur Grenze unterbrochen wird. Fragt man nach der idealistischen Grenze dieser Apantachien, so zeigt sich eine merkwürdige Analogie mit dem Zahlencontinuum als Grenze der unbegrenzten Pantachien. Wie nämlich das Zahlencontinuum stets pantachisch Werthe enthält, die in den unbegrenzten Pantachien, als deren Grenze es gerade aufgefasst wird, nicht vorkommen (s. d. folg. Art.), weil die unbegrenzten Pantachien abzählbar sind, so enthalten die idealistischen Grenzen einiger geometrischen Apantachien des vorigen Artikels Puncte, die in der unbegrenzten Apantachie nicht enthalten sind. Z. B. ist in der an einen Verdichtungspunct erster Ordnung heranwachsenden Punctvielheit dieser Punct selbst nicht enthalten. In der eben näher beschriebenen Punctvielheit, die durch einen Verdichtungspunct zweiter Ordnung charakterisirt ist, sind nicht enthalten die Puncte p' und der Punct p.

Auf die Abzählbarkeit hat übrigens dieser Umstand keinen Einfluss. Denn man braucht diese Grenzpunkte ja nicht zur unbegrenzten Apantachie zu rechnen. Thut man dies aber doch, so ist es leicht, da sie selbst abzählbar sind, sie in die Apantachie so einzureihen, dass sie abzählbar bleibt.

53. Ueber die relative Mächtigkeit der Vielheiten.

Der Begriff der relativen Mächtigkeit von Vielheiten schliesst an den der Abzählbarkeit unmittelbar sich an.

Definition. Wenn zwei endliche oder nicht endliche Vielheiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element einander zuordnen lassen, so haben sie gleiche Mächtigkeit. Unter einem Bestandtheil einer Vielheit M sei jede andere Vielheit M' verstanden, deren Elemente zugleich Elemente von M sind. Sind die beiden Vielheiten M und N nicht von gleicher Mächtigkeit, so wird entweder M mit einem Bestandtheil von N, oder es wird N mit einem Bestandtheil von M gleiche Mächtigkeit haben. Im ersteren Falle nennen wir die Mächtigkeit von M kleiner, im zweiten Falle nennen wir sie grösser als die Mächtigkeit von N*).

Die grössere oder kleinere Mächtigkeit lässt sich auch so definiren. Ist die Zuordnnng von M zu N, Element für Element, unmöglich, sondern bleiben z. B., wenn man, gleichviel wie, die Elemente von M denen von N zuordnet, in der Vielheit N solche Elemente übrig, denen kein Element von M zugeordnet ist, so ist die Mächtigkeit von M kleiner wie die von N. Hiernach sind zwei endliche Vielheiten von gleicher Mächtigkeit, nur wenn ihre Anzahl gleich ist. Endliche Vielheiten sind von geringerer Mächtigkeit wie abzählbare. Abzählbare Vielheiten sind unter sich von gleicher Mächtigkeit.

Der eingreifendste einschlägige Satz lautet aber: Abzählbare Vielheiten sind stets von geringerer Mäch-

*) Borch. Journ. Bd. 84. pag. 242, G. Cantor, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

tigkeit wie das Zahlencontinuum oder die vollständige Pantachie*). Ich will diesem Satze im Hinblick auf später zu Erörterndes noch diese Fassung geben:

Der Inbegriff aller möglichen Werthe lässt sich nicht in die Form einer einfachen Reihe bringen, sondern jede Reihe von Werthen bestimmt selbst in jedem beliebigen Intervall (a, b) Werthe, die ihr nicht angehören. Hr. Cantor zeigt dies wie folgt:

Die abzählbare Grössenmenge sei in eine Reihe

$$\omega_1, \omega_2, \ldots$$

angeordnet. Und wir betrachten eine Argumentstrecke (a, b). Nun seien a_1 und b_1, wo $a_1 < b_1$ die ersten Grössen, die man in der Folge der ω antrifft, welche ins Innere des Intervalls (a, b) fallen. Jetzt fassen wir das Intervall (a_1, b_1) ins Auge und bezeichnen mit a_2, b_2, wo $a_2 < b_2$ die ersten beiden Zahlen der Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots$ welche innerhalb des Intervalls (a_1, b_1) liegen, u. s. f. So entstehen zwei Reihen, die aus der Reihe $\omega_1, \omega_2, \ldots$ herausgegriffen sind: $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$, und denen zwei Successionen der ω je mit steigenden Indices entsprechen, während man hat:

$$a_1 < a_2 < \ldots, \; b_1 > b_2 > \ldots$$

Von den Intervallen (a, b); (a_1, b_1); (a_2, b_2); ... schliesst ein Jedes alle Folgenden ein.

Die Reihe der Intervalle (a, b); (a_1, b_1); etc. bricht entweder einmal ab, oder ist unbegrenzt. Falls sie abbricht, was bei apantachischen Punctsystemen im Allgemeinen stattfinden wird, so kann in ihr letztes Intervall nur noch ein Werth

*) G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen, Borch. Journ. Bd. 77, pag. 260, und Ueber unendliche lineäre Punctmannigfaltigkeiten, Leipz. Ann. Bd. 15, pag. 5.

ω fallen, und alle anderen Werthe dieses letzten Intervalls kommen in der Reihe der ω nicht vor, nach der Vorschrift über die Auswahl der successiven Werthpaare a_p, b_p. Bricht die Reihe der Intervalle nicht ab, so sind die Reihen $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ unbegrenzt und die a_p sowohl wie die b_p besitzen Grenzwerthe a_∞, b_∞, weil sie Reihen nur wachsender oder nur abnehmender Grössen sind, die feste Schranken nicht überschreiten, indem die a_p kleiner als die b, die b_p grösser als die a bleiben. Nun kann noch erstens der Fall eintreten, dass $a_\infty < b_\infty$. Dann wird kein Werth des Intervalls (a_∞, b_∞) in der Reihe der ω vorkommen. Zweitens kann $a_\infty = b_\infty$ sein, wie dies bei allen Pantachien stattfinden wird. Alsdann gehört dieser gemeinsame Grenzwerth $a_\infty = b_\infty$, der eben nie erreicht wird, gleichfalls nicht zur Reihe der ω.

Nachdem wir die Mächtigkeit der abzählbaren Punctmengen im Verhältniss zur vollständigen Pantachie untersucht und fesgestellt haben, dass erstere kleiner ist, bleiben von den angeführten Punctmengen noch zu betrachten übrig die unendlichen Pantachien.

Ich habe bereits bemerkt, dass wir von unendlichen Pantachien zur Zeit, ausser der vollständigen, nur solche kennen, die aus der vollständigen durch Fortlassung unbegrenzter Pantachien oder Apantachien, also jedenfalls abzählbarer Punctmengen entstehen. Beliebig viele abzählbare Punctmengen geben zusammen offenbar wieder eine abzählbare Punctmenge. Wenn also von den vollständigen Pantachien abzählbare Punctmengen gestrichen werden, so kann der Rest nicht abzählbar sein, sonst müsste die vollständige Pantachie von vornherein

abzählbar gewesen sein. Die durch solche Fortlassung entstandenen unendlichen Pantachien sind also nicht abzählbar.

Aber noch mehr. Hr. Cantor weist nach, dass sie sogar von gleicher Mächtigkeit wie das Zahlencontinuum sind*). Wir haben also thatsächlich bis jetzt zwei Vielheiten, deren einer jede uns sonst bekannte Vielheit an Mächtigkeit gleich ist: die Reihe der ganzen positiven Zahlen und das Zahlencontinuum. Hr. Cantor erachtet es für höchst wahrscheinlich, dass es überhaupt nur diese zwei Mächtigkeiten giebt. Die Ueberlegungen der folgenden Artikel enthalten mancherlei allerdings nicht leicht scharf auszusprechende Anzeichen dafür, dass die Dinge bei den lineären Grössenvielheiten sich so verhalten. Die Schlussweise, welche zeigt, dass die Mächtigkeit der vollständigen Pantachie durch Fortlassung abzählbarer Mengen nicht verringert wird, ist auf jede der abzählbaren Punctmenge überlegene Pantachie anwendbar. Es wäre also noch zu zeigen, dass wenn eine Pantachie durch die in Rede stehende Fortlassung nicht verringert wird, sie mit der vollständigen gleiche Mächtigkeit hat.

Wir stellten diese Theorie dar der gewöhnlichen mathematischen Denkform entsprechend, ohne Kritik der Grundanschauungen. Doch treten in dieser Lehre mehrfach Grenzen auf, neue und besonderer Natur, z. B. von Punctmengen die nicht nur wie früher bei Annäherung an einen Punct, ihren Limes, sondern allerwärts sich verdichten, so dass es hier wiederum gilt, die idealistische und die empiristische Anschauung auseinanderzuhalten.

---

*) Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis § 6, Borch. Journ. Bd. 84, pag. 254.

54. Idealistisch-empiristische Kritik der obigen Theorie des Arguments.

Der empiristische Begriff unbegrenzt grosser Punctvielheiten oder Punctmengen und der Begriff von abzählbaren Punctvielheiten sind offenbar vollkommen identisch.

Dass jede nach irgendwelcher Vorschrift vermehrbare, aber in jedem Stadium ihres Anwachsens endliche Vielheit abzählbar ist, zeigten wir oben (pag. 193).

Aber auch dass jede abzählbare Menge, wenn sie keine feste endliche ist, eine unbegrenzt grosse Vielheit bildet, leuchtet ohne Weiteres ein. Denn ist sie einmal der Reihe der ganzen Zahlen zugeordnet, so ist sie in dieser Form auch eine unbegrenzte Vielheit. Bei einer anderen Anordnung kann sie aber nur als abzählbar angesehen werden, insofern diese Anordnung in eine nach ganzzahligen Indices fortschreitende Reihe ohne Auslassung von Elementen sich überführen lässt.

Die abzählbaren Vielheiten und insbesondere die unbegrenzten Pantachien sind im empiristischen Sinne Vorstellungen und gehören der empiristischen Mathematik vollberechtigt an. Es frägt sich wie weit wir empiristisch gelangen, wenn wir das Vorstellen nie aufgebend, der Grenze dieser Vorstellungen möglich uns zu nähern suchen.

In der durch diese Frage vorgezeichneten Richtung wird die vollständige Pantachie als Grenze einer unbegrenzten Pantachie der eigentliche Gegenstand unserer Untersuchung sein. Betrachten wir indessen zuerst einen einfacheren Fall von Grenzbildung, z. B. eine durch einen Verdichtungspunct erster Ordnung charakterisirte Apantachie.

Es handele sich einfach um die Punctfolge

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{7}{16}, \ldots \text{ oder } \frac{2^{n-1}-1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

und der Punct $\frac{1}{2}$ gehöre nicht zu dieser Vielheit. Man wird diese Punctbestimmung sowohl idealistisch als empiristisch auffassen können. Idealistisch umfasst sie alle Puncte der Bestimmung zugleich. Die Entfernungen der Puncte werden zuletzt unendlich klein. Empiristisch denkt man sich die Puncte nur bis zu einem $n$ten auf einmal vorhanden und denkt sich die Zahl n nach Bedürfniss beliebig gross.

Es ist nun wichtig nachzusehen, ob die idealistische Vielheit eine wirkliche Grenze der empiristischen ist, d. i. ob die empiristische Vielheit der idealistischen so sich nähert, dass sie schliesslich jeden Punct, der dieser angehört, in sich aufnimmt. Das ist hier entschieden der Fall, da wir den Punct $\frac{1}{2}$ von der Vielheit ausgeschlossen haben. Die nämliche Betrachtung können wir auf die sämmtlichen Apantachien des Art. 51 anwenden. Sie alle, mit Ausnahme des isolirten Punctsystems, erweisen sich bei näherer Prüfung als empiristisch unbegrenzte Vielheiten, die eine wirkliche idealistische Grenze haben, falls allerdings, wie schon oben (pag. 195) angedeutet, die Verdichtungspuncte selbst entweder von der Vielheit ausgeschlossen, oder besonders hineingerechnet werden.

Diese Punctmengen lassen also eine neutrale Darstellung zu, bei welcher man in Betreff der empiristischen und idealistischen Auffassung sich nicht zu entscheiden braucht. Die Schlüsse, die man an solche Vielheiten knüpft, werden durch die gegensätzliche Anschauungsform nicht berührt. Es herrscht dasselbe Verhältniss wie bei der Geometrie, wo es für die Ergebnisse der Forschung gleichgültig ist, ob das Idealgenaue oder das Unbegrenztgenaue zu Grunde gelegt wird, ob man sich die unendlich dünne Gerade oder die pag. 118 geschilderte gezogen denkt. Wenigstens ist bis jetzt eine Dunkelheit oder gar eine Paradoxie, welche auf den idealistisch-

empiristischen Gegensatz zurückzuführen wäre, nicht an den Tag getreten.

Nachdem nun festgestellt, dass die unbegrenzten Apantachien idealistische Grenzen haben, wollen wir die Grenze der unbegrenzten Pantachien einer ähnlichen Prüfung unterwerfen, d. i. zusehen, wie Idealist und Empirist die vollständige Pantachie auffassen müssen.

Wir können der vollständigen Pantachie wieder das analytische Symbol

$$Z = lim \left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \cdot\cdot\frac{\alpha_n}{2^n}\right), \quad \alpha_p = 0 \text{ oder } 1$$

zu Grunde legen. Ihre Bedeutung ist also:

Sämmtliche durch die endliche oder endlose Reihe

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \cdots$$

bestimmte Grössen, die irgendwelchen Werthen 0 oder 1 der α entsprechen.

Von den ewig gesetzlosen Folgen als einer rein idealistischen schon genügend in Betracht gezogenen Fiction sehen wir hier ab. Alsdann ist analytisch die vollständige Pantachie der Inbegriff aller möglichen Successionsgesetze der in die Folge

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

für die α eingesetzten Zeichen 0,1 anzusehen. Der Idealist wird den Inbegriff als wirklich vorhanden annehmen, jedes noch zu ersinnende Gesetz unabhängig vom Denkenden von Ewigkeit her da. Der Empirist denkt sich darunter die schon bekannten Gesetze und den Ramen für alle noch zu findenden. Doch wenden wir uns zum geometrischen Bilde der vollständigen Pantachie, wo jeder besonderen Folge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ein besonderer Punct entspricht.

Der Idealist ist offenbar ohne Weiteres am Ziele. Die

sämmtlichen Werthe Z ordnet er als Idealpuncte auf der idealen Geraden, und zwischen den einzelnen Puncten liegen die unendlich kleinen Strecken aller Ordnungen.

Er verzichtet darauf, sich ein Bild dieser Punctmenge zu machen, also wird er auch nicht darauf bestehen, ihr Werden sich vorzustellen. Die vollständige Pantachie ist für ihn der wirklich existirende Limes der unbegrenzten Pantachie, in dem Sinne, dass dessen unendlich viele Einzelwerthe zugleich vorhanden sind, ganz wie eine endliche Anzahl Grössen. Er räumt also dem Begriff »*lim* $\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \ldots \frac{\alpha_n}{2^n}\right)$ für alle Combinationen der α« dasselbe Recht ein, wie der Grenze des endlosen Decimalbruchs. Er nimmt ihn auf unter die Existenzen, an die er logisch glauben muss.

Es ist übrigens kein neuer logischer Process, den sein Denken hierbei vollzieht. Als er sich pag. 69 die grundlegende Frage stellte:

Wie viel kleinere Strecken, als eine gegebene, sind vorhanden, oder möglich, d. i., wenn nicht vorhanden, nur zufällig nicht vorhanden?

und sich die Antwort gab, dass es unendlich viele seien, hatte er den eben beschriebenen Sinn der vollständigen Pantachie genau erfasst und ausgesprochen. Die kleineren Theilstrecken sind mit allen möglichen Argumentwerthen gleichbedeutend, und so weicht das hier entworfene idealistische Bild des Arguments in keinem Zuge ab von jenem ersten, das ein anderer Gedankengang erzeugte.

Prüfen wir jetzt, wie der Empirist die Dinge sich denken muss. Zunächst muss er die vollständige Pantachie als gleichzeitig vorhandene Vielheit aller möglichen Grössen verwerfen. Denn endlich kann diese Vielheit nicht sein, sie kann auch

nicht blos unbegrenzt gross sein, da sie alle möglichen Einzelwerthe schon enthält, sie ist also unendlich, mithin unvorstellbar und empiristisch nicht vorhanden. Sie könnte also nur eine unvorstellbare Grenze sein. Wovon aber?

Der Empirist denkt sich auf der Einheitsstrecke ungezählte Puncte, er lässt sie beliebig sich vermehren, und immer dichtere Punctmassen bilden. Mag er bei dieser Vorstellung verweilen, oder seine Argumentstrecke sogleich aus Puncten sich zusammensetzen, die er hier feiner dort gröber sich denkt, immerhin kann er durch Zuschärfung seiner Vorstellung das Bild seinem Wesen nach nicht verändern. Es bleibt eine stets endliche, wenn auch beliebig dichte Punctvielheit. Etwas Anderes kann der Empirist sich nicht vorstellen. Soweit läge freilich nichts Auffallendes in der Gegenüberstellung der idealistischen und der empiristischen Anschauungsweise. Scheinbar wiederholt sich lediglich die bisherige Beziehung zwischen Grenze und Vorstufe zur Grenze, zwischen beliebig genau und ganz genau, dieselbe Beziehung, welche wir eben bei den unbegrenzten Apantachien festlegten. Allein wenn man näher zusieht, tritt Neues auf. Der Empirist darf sich die vollständige Pantachie nur im Werden denken, d. i. als zunehmende Punctvielheit, die der vollständigen Pantachie unbegrenzt sich nähert, und so fragt er: ob und wie man eine stets endliche, zunehmende Punctmenge sich denken kann, deren Limes die vollständige Pantachie ist, darunter verstanden, dass die zunehmende Punctmenge allmählig jeden besonderen Werth in sich aufnimmt.

Die Antwort lautet:

Es giebt keine zunehmende Punctvielheit, bei der z. B. einer ursprünglichen endlichen

Punctmenge fort und fort neue Puncte nach irgendwelcher Vorschrift eingereiht werden, und die der vollständigen Pantachie der Art unbegrenzt sich näherte, dass jeder besondere Werth einmal in ihr erscheint.

Der Beweis hierfür ist schon erbracht. Die stets endliche zunehmende Punctvielheit ist abzählbar. Also liefert sie in jedem kleinsten Intervall Werthe die ihr nicht angehören, wie Art. 53 nachgewiesen wurde. Diese Werthe, eine Pantachie bildend, sind daher dem empiristischen Bilde irgend einer das Argument besetzenden Punctvielheit fremd. Auch sind diese neu hinzukommenden Werthe nicht von ähnlicher Beschaffenheit wie die Verdichtungspuncte gewisser Apantachien, von denen oben die Rede war, die gleichfalls dem empiristischen Bilde nicht ohne Weiteres angehörten, ihm aber eingefügt werden konnten. Sie bilden vielmehr die überwiegende Mehrzahl, da, wie gleichfalls oben gezeigt wurde, die vollständige Pantachie durch Fortlassung abzählbarer Vielheiten nicht ärmer an Einzelwerthen wird.

Somit folgt:

Die idealistische vollständige Pantachie oder das Zahlencontinuum ist keine wirkliche Grenze irgendwelcher empiristischen Folge von Vorstellungen.

Für den Empiristen existirt das Zahlencontinuum daher nicht allein nicht als Grenze, sondern nicht einmal als Ziel der Annäherung, es existirt also für ihn gar nicht. Dies gilt nicht blos für den heutigen Stand der Wissenschaft, sondern es wird immer so sein.

Mit dem Argument verbindet der Empirist daher im Ganzen folgende Vorstellung:

I. Auf der Einheitstrecke entspricht jedem besonderen Werth $Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \ldots$ ein beliebig genau zu denkender Punct.

II. Eine veränderliche Punctmenge, die durch Vermehrung sich der Menge aller möglichen Puncte unbegrenzt näherte, giebt es nicht. Mit der vollständigen Pantachie verbindet der Empirist nur die Vorstellung, dass seiner Phantasie, wenn er die Argumentstrecke mit Puncten und Punctarten in immer grösserer Menge besetzt sich denken will, keine Schranken gesetzt sind.

55. Schlussbemerkungen über das idealistische und empiristische Argument und Festsetzung der neutralen Darstellungsweise.

Würde nun der im vorigen Artikel festgelegte Gegensatz zwischen der idealistischen und der empiristischen Auffassung des Arguments Einfluss auf die Methoden und Ergebnisse der Analysis üben, so bliebe Nichts übrig, als zwischen den beiden Grundansichten zu »optiren«, und sich seine Analysis entsprechend zurechtzulegen. Allein zum Glück ist dem nicht so. Nirgends — ausser natürlich in der Theorie der idealistischen Pantachien selbst — setzt die Analysis mehr voraus als was der Empirist als vorstellbar zulässt. Die Punctsysteme die benutzt werden, sind Apantachien oder unbegrenzte Pantachien. Wenn es z. B. um eine Function sich handelt, die Eins ist für rationale, Null für irrationale Werthe des Arguments, so bilden die rationalen Werthe eine unbegrenzte Pantachie, und unter den irrationalen kann man sich ebenfalls unabsehbare Schaaren unbegrenzter Pantachien denken.

Denn eine andere Vorstellung kann eben kein Mensch mit solcher Function verbinden. Wenn es weiter heisst: ein beweglich gedachter Punct durchläuft alle Werthe zwischen den Puncten a und b, so ist auch dieser Ausdruck empiristisch zulässig, wenn er nichts anderes besagt, als dass in der Strecke (a, b) kein besonderer Punct gedacht werden kann, mit dem der bewegliche, d. i. unbestimmt gelassene Punct nicht identificirt werden könnte, und analytisch reicht dies in allen Fällen aus. Auf diese beiden Vorstellungen lassen die analytischen Vorgänge stets sich zurückführen.

Hier könnte übrigens den Idealisten die Lust anwandeln, den Streit mit dem Empiristen fortzusetzen. Er könnte ihm vorhalten, »dass er durch seinen Verzicht auf Vorstellungsfremdes dem combinirenden Denken nur ein dürftiges und sogar ungenügendes Gebiet übrig lasse. Denn wie wolle er sich z. B. mit der Mechanik abfinden, da doch die unveränderliche Bahn gleichzeitig alle Puncte enthalten müsse, die der bewegliche Punct durchläuft, der Begriff Bahn also das idealistische Zahlencontinuum enthalte?« Worauf der Empirist etwa entgegnen dürfte: »Er bestreite ja keineswegs, dass seine Kritik der Voraussetzungen eine grosse Beschränkung des Denkgebietes zur Folge habe, auch läugne er nirgends das Vorhandensein des Unvorstellbaren. Nur sei dies in seinen Augen kein Gegenstand mathematischer Speculation. Gewiss sei die Stetigkeit etwas irgendwie Vorhandenes und höchst Geheimnissvolles. Ein bewegter Punct auf fester Bahn befinde sich zu jeder Zeit an einer Stelle der Bahn, bedeute in seiner jedesmaligen Lage einen festen Argumentwerth, und nehme jeden besonderen Argumentwerth zwischen den Enden der von ihm durchlaufenen Bahn wenigstens einmal an. Das sei alles,

was man sagen könne, und reiche für die Mechanik aus. Weil die Stetigkeit nicht begreiflich sei, so werde in der analytischen Mechanik die Bahn thatsächlich zerstückelt, d. i. behufs der Rechnung mit einer unbegrenzten Pantachie von Puncten besetzt. Sodann denke man sich den bewegten Punct nacheinander die Strecken zwischen den aufeinanderfolgenden Puncten der Pantachie zurücklegend, und diese ins Unbegrenzte vermehrt, wobei aber niemals eine vollständige Pantachie aus ihr werde. Endlich gehe man zu Grenzen über, wodurch Differentialquotienten entstünden. Bei der darauf folgenden Integration, wenn es auf eine solche und nicht auf die Aufstellung einer Primitivfunction ankäme, würde wiederum eine unbegrenzte Pantachie von Argumentwerthen zu Grunde gelegt, und der Grenzwerth der Summe, den wir Integral nennen, habe mit der vollständigen Pantachie durchaus nichts zu thun, sei übrigens eine wirkliche Grenze. Die vollständige Pantachie spiele nur in ihrer eigenen Theorie eine Rolle, etc.«

Wie werden wir vom neutralen Standpuncte aus die vollständige Pantachie, den Inbegriff der lineären mathematischen Grössen aufzufassen haben?

Gewiss ist sie von jedem Standpunct aus etwas von einer unbegrenzten Punctvielheit, d. i. von einer beliebig rasch anwachsenden Vielheit einzelner Werthe wesentlich Verschiedenes. Der Ausdruck:

$$Z = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{4} + \text{etc.}, \ \alpha_p = 0 \text{ oder } 1,$$

enthält, wenn die α nicht von einer Ordnung an sämmtlich Null sind, wie schon bemerkt, den Inbegriff der Gesetze, nach denen eine unbegrenzte Folge der α bestimmt werden kann. Die Mannigfaltigkeit solcher Gesetze und der Func-

tionen einer Veränderlichen erscheinen aber, wenn man sich in diese abgezogenen Fragen vertieft, als Begriffe von ähnlichem Umfang. Und von der Mannigfaltigkeit der möglichen Functionen kann man sich ganz und gar keine Vorstellung machen.

Wir werden also diese höchst umfassende Natur der vollständigen Werthpantachie unbedingt einräumen, und die Frage ist eben wie wir dabei das Argument zu verstehen haben, um der Kritik weder des Idealisten noch des Empiristen zu verfallen.

Wäre das Zahlencontinuum eine Grenze von wirklichen Vorstellungen, wie ein ideales Dreieck als Grenze von empiristischen beliebig genauen anzusehen ist, so könnte man diese Unterscheidungen bei der neutralen Darstellung der Analysis auf sich beruhen lassen, indem man ihrer jedoch, wie bei den Ausdrücken Grösse, Werth, Länge u. dergl., eingedenk bliebe (pag. 156). Wenn das Zahlencontinuum zur Sprache käme, würde der eine dabei die ideale Grenze, der andere eine Vorstufe zur Grenze sich denken. Allein der Umstand, dass das Zahlencontinuum keine wirkliche Grenze ist, lässt der neutralen Darstellung keine andere Wahl, als es fallen zu lassen und der empiristischen Auffassung sich anzuschliessen. Der Idealist kann dann eben nur den Vorwurf, den er oben dem Empiristen machte, auch gegen uns richten, dass wir nämlich in seinen Augen den Tummelplatz der Wissenschaft unnöthig einschränken. Wenn wir nun auch die empiristische Auffassung des Arguments unserer ferneren Darstellung zu Grunde legen werden, so ist doch zu betonen, dass wir damit nicht etwa zwischen den beiden Auffassungsweisen »optirt« und für die empiristische uns entschieden haben. Es handelt sich hier

eben nur um eine Darstellungsweise, welche gegen die Denkform weder des Idealisten noch des Empiristen verstösst.

Zugleich mit der idealistischen vollständigen Pantachie, oder dem Zahlencontinuum sind auch die unendlichen Pantachien idealistischer Natur, und nicht minder ist es der Begriff der Zuordnung, so weit er auf dergleichen Vielheiten sich bezieht. Er ist eine ideale Uebertragung der vorstellbaren abzählbaren Zuordnung auf die Vielheit aller möglichen Werthe. Allerdings sind sämmtliche für jeden Argumentwerth gegebene Functionen einer Veränderlichen Zuordnungen zur vollständigen Pantachie. Aber diese Vorschriften sind stets so beschaffen, dass sie entweder allgemein für die Argumentwerthe gelten, oder, wie im folgenden Kapitel erörtert wird, für sämmtliche Argumentwerthe unter Fortlassung abzählbarer Pantachien, für welche dann andere Bestimmungen gültig sind. Hierdurch erhalten die functionalen Zuordnungen empiristischen Charakter. Die abstrakte Zuordnung von Werth zu Werth bei unendlichen Pantachien ist rein idealistisch.

Der Umstand, dass keine auf der Argumentstrecke anwachsend gedachte Punctvielheit dem idealistischen Zahlencontinuum sich nähert, dass beide durchaus heterogen sind, indem jene vorstellbar ist, dieses an keine Vorstellung sich anschliesst, hat seine beherzigenswerthe Seite. In der That, wenn man in Bezug auf idealistisch gedachte vollständige oder unendliche Pantachien Betrachtungen anstellt und Schlüsse zieht, die dem Bilde einer empiristisch gedachten beliebig dichten Punctmenge entnommen sind, so läuft man Gefahr in Paradoxien zu gerathen. Denn da die unbegrenzte Pantachie keine Approximation an die vollständige ist, so ist ein Schluss von Eigen-

schaften jener auf die gleichen Eigenschaften dieser nicht ohne Weiteres statthaft.

Von zunehmenden Grössen oder Anzahlen gilt, dass sie entweder eine Grenze haben, oder (idealistisch) unendlich werden. Eine Grenze im gewöhnlichen Sinne hat die zunehmende Punctmenge nicht, also müsste man das Zahlencontinuum dem Unendlichen entsprechen lassen. Eine Eigenschaft hat es mit ihm gemein. Wie das Unendliche nicht endlich wird, wenn man Endliches von ihm abzieht, so wird das Zahlencontinuum nicht ärmer an Einzelwerthen, büsst an Mächtigkeit nicht ein, wenn unbegrenzte Pantachien daraus fortgelassen werden. Indessen ist dies wohl auch die einzige Analogie, die zwischen beiden idealistischen Vorstellungsgrenzen besteht.

Auch in der Naturwissenschaft fällt der Lehre von den Pantachien eine Rolle zu.

Nicht im Atombegriff selbst macht ein wesentlicher Unterschied zwischen der empiristischen und der idealistischen Anschauung sich geltend, sondern in der Art wie die Wirkungselemente der Mechanik, die fernwirkenden Molekel, im Raum vertheilt gedacht worden. Der Empirist, der ihrer nur eine endliche hinreichend grosse Zahl zu Grunde legen darf, wird mit seinen Corpusculartheorien nicht weit kommen. Offenbar braucht ihm nur die Synthese des Erscheinungsgebiets zu gelingen, aus welchem eben die Idee des fernwirkenden Molekels abgezogen ist, nämlich des mechanischen. Für die Synthese anderer Erscheinungsgebiete, z. B. des chemischen, wird er möglicherweise anderer abstrakter Wirkungsformen bedürfen, als das fernwirkende Molekel. Und nun vollends die organischen Vorgänge haben zweifellos ihre eigenen empiristischen Endabstractionen.

Der Empirist wird also die Abziehung des fernwirkenden Molekels als brauchbar für die Darstellung der Erscheinungen nur der gewöhnlichen Mechanik voraussetzen. Der Idealist dagegen, wenn es ihm für seine Weltanschauung wünschenswerth ist, besitzt in der vollständigen Pantachie einen Begriff, der in seinen Augen einen unermesslich viel reicheren Inhalt haben muss, wie die unbegrenzten Pantachien des Empiristen.

Für die Theorie würde die Verbindung der Vorstellung von zerstreuten Molekeln mit der idealistischen räumlichen vollständigen Pantachie, z. B. zur Herleitung des Druckes Erfolg versprechen, falls es nämlich gelänge, in den physikalischen Begriff der vollständigen Atompantachie einen unser Bedürfniss nach Genauigkeit befriedigenden Inhalt zu legen.

Die Ausführungen dieses Capitels und ein Theil des folgenden lehren, wie nöthig es in manchen analytischen Gebieten ist, dass man sich völlig klar darüber sei, ob man für die neutrale Darstellung annehmbare oder idealistische Mathematik zu Tage fördert. Nur so kann man das, was dem wirklichen Vorstellungsgebiet angehörig ist, sondern von dem, was ihm unter dem Bilde eines Wortes entnommen und in den mit Unwirklichem weiter geführten logischen Process verflochten wird.

Ich lasse zum Abschluss des Capitels eine Uebersicht über die darin besprochenen Punctvertheilungen folgen.

56. Uebersicht über die Punctvertheilungen.

I. Pantachien.

A. Vollständige Pantachie.

Empiristisch darunter verstanden den Inbegriff aller denkbaren durch geometrische oder numerische Bestimmung festgelegten oder noch festzulegenden Grössen
Idealistisch das Zahlen- oder Grössencontinuum auf der Einheitstrecke, d. i. der Inbegriff der gleichzeitig vorhandenen Vielheit aller möglichen Grössen.

B. Unbegrenzte Pantachie.

Eine Zahlenbestimmung, die so beschaffen ist, dass in jedem noch so kleinem Intervall ihr genügende Puncte anzutreffen sind. Diese Punctvielheit ist stets endlich, und kann beliebig gross gedacht werden.

C. Unendliche Pantachie.

Hierunter ist jede Pantachie verstanden, die nicht unter B gehört, also gehört ihr z. B. die vollständige Pantachie A an.

II. Apantachien.

A. Begrenzte Apantachie.

Isolirte Puncte in fester Anzahl.

B. Unbegrenzte Pantachien. Z. B.:

1. Verdichtungspunctsysteme, d. i.
   isolirte Puncte, die sich in der Richtung einzelner Puncte ins Unbegrenzte verdichten und Verdichtungspuncte endlicher und unbegrenzt hoher Ordnung erzeugen.
2. Successive Streckeneintragungen,
   deren Endpuncte ein Punctsystem bilden, das apantachisch ist, aber nirgends isolirte Puncte enthält.

III. Punctsysteme, die sich nicht in eine endliche Anzahl pantachischer und apantachischer Strecken zerlegen lassen.

Ausser diesen Eintheilungen der Punctvielheiten sind unzählige denkbar. Wegen ihres Reichthums an Beziehungen sind hervorzuheben:

1. Die abzählbaren Vielheiten. Das sind sämmtliche obige Vielheiten mit Ausnahme der Pantachien: I, A und C.
2. Die integrirbaren Punctsysteme. Sie sind nur unter II. vorhanden. Integrirbar sind nur Apantachien, aber nicht sämmtliche. Zu den integrirbaren Apantachien gehören ausser der begrenzten Apantachie, alle mit II, B, 1 bezeichneten, d. i. isolirte Puncte mit Verdichtungspuncten. Von II, B, 2 ist nur ein kleiner Theil integrirbar. Die Punctsysteme III. sind nie integrirbar.

Cap. IV.

Ueber die Function.

57. Vorbegriffe über die Function.

Wir werden jetzt den Functionsbegriff über das vom Empiristen und Idealisten bereits Vorgebrachte hinaus verfolgen, dabei aber die Unterscheidung der Functionen in anorthoide und orthoide als schon offenbar neutralen Charakters, wo sie nöthig erscheint, ohne neue Erörterung eintreten lassen.

Wie genügend betont, ist unter Function der Veränderlichen oder des Arguments zu verstehen eine Festsetzung, vermöge deren den Werthen des Arguments Werthe der Function zugeordnet sind, wobei indessen noch der Ausdruck »Werthe der Function« seinem ganzen Umfang nach erklärt werden muss: Einem besonderen Argumentwerth kann als Functionswerth ein besonderer Werth, oder eine begrenzte oder unbegrenzte Anzahl von Werthen, oder ein ganzes Intervall von Werthen oder eine Reihe solcher Intervalle zugeordnet sein. Kurzum es kann ihm irgendeine der im Artikel 51 angeführten Punctvertheilungen oder der damit verbundenen Streckenvertheilungen zugeordnet sein. Man verbildlicht sich nach Descartes dergleichen Vorschriften, indem man durch die fraglichen Argumentwerthe gerade Linien senkrecht auf die Argumentstrecke gezogen, und auf diesen Linien die Functionswerthe abgetragen sich denkt, die positiven nach der einen, die negativen nach der anderen Seite der Argumentstrecke. Aber nicht

allein in Bezug auf die Art der zugeordneten Functionswerthe muss deren Uneingeschränktheit betont werden, auch hinsichtlich der Argumentwerthe, die in die Function genannte Festsetzung eingehen, herrscht volle Freiheit. Der allgemeine Functionsbegriff, wie er sich aus der neueren Analysis herausgestaltet hat, fordert z. B. nicht entfernt, dass die Function für jeden Argumentwerth gegeben sei; vielmehr braucht sie, falls dies für unsere Zwecke genügt, nur für irgend eines der Punctsysteme des Art. 56 gegeben zu sein. Ja, um die äusserste Allgemeinheit zu wahren, können wir eine Vorschrift uns denken, nach der in irgendwie festgesetzten Strecken des Arguments je ein Punct beliebig gewählt und mit dem Functionswerth belegt werden kann, analog, wie wir so eben dem einzelnen Argumentwerth auch ganze Intervalle als Functionswerth zuweisbar sein liessen.

Bezüglich der Functionswerthe, die den einzelnen Argumentwerthen zugeordnet werden, wird man also je nach ihrer Anzahl und Beschaffenheit eindeutige, mehrdeutige u. s. f. und zwischen gegebenen Grenzen unbestimmte Zuordnungen mannigfacher Art zu unterscheiden haben.

Hinsichtlich der durch die Function in Anspruch genommenen Argumentwerthe, wird man vollständig (d. i. für die vollständige Pantachie der Argumentwerthe) gegebene, und nicht vollständig (z. B. irgendwie pantachisch oder nur apantachisch) gegebene Functionen zu unterscheiden haben.

Um nun den Functionsbegriff weiter klarzulegen, schränken wir ihn der Kürze halber dahin ein, dass wir die Function der vollständigen Pantachie der Argumentwerthe $0 \leqq x \leqq 1$ zugeordnet voraussetzen.

Der Idealist steht hier zunächst einer ähnlichen Frage gegenüber, wie der nach den ewig gesetzlosen Decimalbrüchen. Er denkt sich auf jedem Einzelwerth des Zahlencontinuums eine Ordinate errichtet. Auf dieser Ordinate befindet sich ein Zahlencontinuum genau wie auf der Argumentstrecke, und den Inbegriff aller Functionen erhält er, wenn er alle Argumentwerthe mit allen Combinationen der Ordinatenwerthe belegt. In diesem Gedankengang fordert Nichts das Vorhandensein einer Vorschrift, sondern es entspricht durchaus der Anschauungsweise des Idealisten die unendliche Menge aller besonderen Functionswerthe durch den Zufall gegeben sich zu denken, wodurch er zur äussersten Abstraction einer vollkommen gesetzlosen Function gelangt.

Der Empirist dagegen, für den es kein Zahlencontinuum giebt, kann sich zwar unzählige Puncte mit beliebigen Werthen besetzt denken, er kann unzähligen Pantachien und Apantachien nach beliebigen Vorschriften ins Unbegrenzte Functionswerthe zuordnen, es bleibt für ihn aber stets der durch solche Bestimmungen nicht ärmer an Puncten gewordene Rest der vollständigen Pantachie mit Werthen zu versehen.

Diese übrig bleibende unendliche Pantachie bildet stets den Hintergrund, dem der Empirist nie sich nähert, wenn er auch alle seiner Phantasie zugänglichen Argumentpuncte mit Werthen besetzt annimmt. Um die Function vollständig zu bestimmen, muss er unabweislich zu einer allgemeinen Vorschrift, welche die Function einer unendlichen Pantachie des Arguments zuordnet, seine Zuflucht nehmen. Sie ist empiristisch eine Nothwendigkeit.

Das Ergebniss der empiristischen Betrachtung ist also:

Um eine vollständig bestimmte Function zu erhalten, können zunächst beliebige iso-

lirte Puncte des Arguments mit beliebigen Werthen besetzt, beliebigen Apantachien und unbegrenzten Pantachien können nach besonderen der Willkür unterliegenden Bestimmungen Functionswerthe zugewiesen werden: neben diesen Festsetzungen aber muss noch eine allgemeine Vorschrift gegeben sein, welcher gemäss der Inbegriff der noch immer übrigbleibenden unendlichen Pantachie von Argumentwerthen mit Functionswerthen zu versehen ist.

Dies ist empiristisch der allgemeinste Begriff einer vollständig gegebenen Function, über den wir in unserer neutralen Darstellung nicht hinausgehen dürfen, da wir die völlig gesetzlosen Functionen des Idealisten als eine rein idealistische Fiction bei Seite lassen müssen *).

Hiernach würden vor allen Dingen Functionen zu unterscheiden sein, bei denen *eine* allgemeingültige Vorschrift Function und Argument verbindet, und solche Functionen, bei denen von der allgemeinen Vorschrift gewisse Punctarten

---

*) Die idealistisch unzweifelhaft richtige Bemerkung (Art. 39), und die wir jetzt so ausdrücken, dass eine Function die für die vollständige Pantachie minus unbegrenzter Pantachien, und für diese unbegrenzten Pantachien besonders gegeben ist, nicht als vollständig gegeben zu erachten sei, dass vielmehr eine gemeinsame Vorschrift alle Functionswerthe bestimmen müsse, darf die neutrale Darstellung nicht berücksichtigen, da die »Kluft« zwischen unbegrenzt und unendlich, l. c., oder die Nebelstrecke pag. 122 idealistische Fictionen sind, die der Empirist nicht unbeanstandet lassen würde. Ich bemerke übrigens, dass in vielen Fällen jener idealistische Einwand idealistisch entkräftet werden kann, wofür ein Beispiel ist die Function II_b (pag. 222) mit ihrer Deutung (pag. 225) wo gezeigt wird, wie das für die unbegrenzte Pantachie gültige Gesetz auf die vollständige ausgedehnt werden kann.

ausgenommen und mit anderen Werthen als die allgemeine Vorschrift sie vorschreiben würde, zu besetzen sind.

Man darf es kaum als eine Beschränkung ansehen, wenn wir auf das idealistische Functionsbild, oder richtiger auf sein geometrisches Functionsäquivalent (pag. 147) verzichten. Was die empiristische Kritik davon übrig lässt, ist, näher besehen, noch von so erstaunlicher Allgemeinheit, dass eine solche Grundlage für die fernere Entwickelung des Functionsbegriffs uns völlig genügen kann, was sie freilich auch muss. In diesem Capitel knüpfen wir nur noch wenige Erörterungen an den allgemeinen Functionsbegriff. Es wird sich lediglich um Beziehungen des einzelnen Functionswerthes zu seinen Nachbarwerthen handeln, und um die Elemente des hieran unmittelbar sich anschliessenden Stetigkeitsbegriffes.

Wenn wir später die allgemeine Untersuchung wieder aufnehmen, wird das natürlich und logisch sich darbietende Verfahren sein, jenen allgemeinen Begriff Schritt vor Schritt in der Richtung der sogenannten analytischen Functionen einzuschränken, wozu das Classificationsprincip liefern die Begriffe vom Integral, vom Differentialquotienten, namentlich aber die verschiedenen Gültigkeitsbedingungen für die Darstellbarkeit der Functionen durch Darstellungsformeln. Eine immer schärfere und erschöpfendere Classification der Functionen kann als der Leitstern nicht allein unserer gegenwärtigen Untersuchungen, vielleicht sogar als asymptotisches Ziel der Analysis überhaupt angesehen werden.

Das Ziel ihres Forschens wäre hiernach eine Systematik der Functionen, wie die Naturkunde eine in sich nothwendige und den Erscheinungen vollkommen angepasste Systematik der Lebewesen anstrebt, ein Vergleich, bei dem ich gern ver-

weile. Unverkennbar besteht einige Analogie einerseits zwischen den einfachsten Pflanzen- und Thierformen, dem lockeren Zusammenhang ihrer Organisation u. s. f. und dem allgemeinsten dem anorthoiden Functionsbegriff (pag. 142), sowie andererseits zwischen den geschlossenen höheren Thierformen und den Functionen der complexen Functionentheorie, von denen irgend ein Bezirk genügt, um die Function durch die ganze Ebene fortzusetzen, wie Cuvier aus einem Knochen die Species construirte.

Zwischen beiden Classificationen bemerkt man jedoch, wenigstens zur Zeit, einen formalen Unterschied. Die Systematik der Lebewesen stellt wesentlich coordinirte Classen auf, obschon auch hier subordinirende Eintheilung vorangeht und vorangehen muss. Die successiven Classen der allgemeinen Functionentheorie sind aber bisher nur subordinirt, denn jede folgende Klasse muss, weil durch Beschränkung eines allgemeineren Functionsbegriffs entstanden, allen vorhergehenden angehören. Doch ist dies wohl nur der erste Keim der künftigen Lehre. Wie die Theorie der analytischen Functionen, welche jetzt schon mancherlei coordinirte Klassen von Functionen kennt, wird die allgemeine Functionentheorie der naturhistorischen Systematik bei fortgesetzter Forschung immer ähnlicher sich gestalten.

58. Einige Beispiele von Functionen.

Ich beginne damit einige einfache Beispiele von Functionen zu geben, um durch sie weitere Begrifffestsetzungen zu verdeutlichen. Als mit besonderen Functionsbestimmungen zu versehende unbegrenzte Pantachie bieten die Rationalzahlen sich dar, von denen ich folgende Eigenschaften benützen werde.

Ich gebe der Rationalzahl die Form $\frac{Z}{N}$, wo Z prim zu N.

Es soll N in der Form $p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \dots p_r^{\varrho_r}$ benutzt werden, wo die p Primzahlen, die ϱ ganze Zahlen bedeuten.

Erstens: Man kann um jeden Punct ein hinreichend kleines Intervall abgrenzen, so dass darin, jenen Punct ausgenommen, nur Rationalzahlen vorkommen mit Nennern die grösser sind als eine beliebig gross angenommene Zahl N_1.

Denn alle Rationalzahlen mit Nennern $\leqq N_1$ bilden ein isolirtes Punctsystem, und in jedem noch so kleinen Intervall giebt es Rationalzahlen.

Zweitens: Ist ein Intervall Δ gegeben, und eine Reihe Primzahlen $p_1, p_2, \dots p_r$, wo $p_1 \geqq 2$, so enthält das Intervall Δ stets Rationalzahlen der Form $\frac{Z}{p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \dots p_r^{\varrho_r}}$.

Es ist z. B. leicht zu zeigen, dass das Intervall Δ Rationalzahlen der Form $\frac{Z}{\pi^\varrho}$ enthält, wo $\pi = p_1 p_2 \dots p_r$. Wir geben $\frac{Z}{\pi^\varrho}$ die Form:

$$\alpha_o + \frac{\alpha_1}{\pi} + \frac{\alpha_2}{\pi_2} \ldots + \frac{\alpha_{\varrho-1}}{\pi^{\varrho-1}} + \frac{\alpha_\varrho}{\pi^\varrho},\ \alpha_p = 0, 1, 2, .. \pi - 1.$$

Z ist prim zu $p_1, p_2, .. p_r$ z. B. wenn $\alpha_\varrho = 1$ ist. Puncte

$$\alpha_o + \frac{\alpha_1}{\pi} + \ldots \frac{\alpha_{\varrho-1}}{\pi^{\varrho-1}}$$

fallen bei hinreichend grossen ϱ in jedes beliebig kleine Intervall. Es wird also ϱ stets so gross angenommen werden können, dass ein solcher Punct in ein Intervall δ fällt, welches in Δ liegt, und dessen Endpuncte von den Endpuncten von Δ um mehr als $\frac{1}{\pi^\varrho}$ abstehen, so dass auch

$$\alpha_o + \frac{\alpha_1}{\pi} + .. + \frac{\alpha_{\varrho-1}}{\pi^{\varrho-1}} + \frac{1}{\pi^\varrho}$$

in Δ fällt.

Dies vorausgeschickt, lege ich folgende Functionen vor:

Anorthoide Functionen.

I. a. Es sei $f(x) = 3x$ für die Werthe:

$x = 0,3;\ 0,33;\ 0,333;$ etc.,

und gleich Null für $x = \frac{1}{3}$.

b. Es sei $f(n) = u_o + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$,

wo die u irgendwelche Grössen. Diese Function ist nur für ganzzahlige Argumente vorgeschrieben.

II. a. Es sei $f(x)$ Eins für rationale Argumente x, Null für irrationale.

b. $f(x)$ nehme für Rationalzahlen $x = \frac{Z}{p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \ldots p_r^{\varrho_r}}$

die Werthe

$f(x) = \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r}$ an, und sei sonst Null.

c. $f(x)$ nehme für $x = \frac{Z}{p_1^{\varrho_1} \dots p_r^{\varrho_r}}$ die Werthe

$f(x) = \frac{Z}{p_1^{\varrho_1} \dots p_r^{\varrho_r}}$ an, und sei sonst Null.

Orthoide Functionen.

III. $f(x) = \frac{1}{x}$, $sin\frac{1}{x}$, $x\ sin\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

IV. $f(x) = lim_{h=\infty} \frac{1 + hx}{1 + hx^2}$, $f(x) = arctghx$.

V. Ausser diesen besonderen anorthoiden und orthoiden Functionen führe ich noch die Functionengruppe $\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{cos\, m_p x}{\mu_p}$ an, welche je nach dem relativen Wachsthum von p, m_p, μ_p eine ganze Skala von Orthoidien und Anorthoidien repräsentirt (Art. 63).

Die Functionen I sind Beispiele nicht vollständig gegebener Functionen. Es versteht sich von selbst, dass wir solche Functionen unseren Zwecken entsrpechend durch Besetzung der freigelassenen Argumentwerthe zu vollständig gegebenen ergänzen dürfen.

59. Directe und indirecte Functionswerthe.

Untersuchen wir jetzt, was im allgemeinsten Sinne unter einem besonderen Functionswerth zu verstehen sei.

Man wird sagen, $f(x)$ ist einfach der Functionswerth, welchen die Functionsvorschrift dem x zuordnet. Dies ist zwar richtig. Allein zu diesen directen Functionswerthen kommen noch andere hinzu, die nicht nur, weil die Anwendungen darauf führen, sondern rein abstract gedacht, als Werthe $f(x)$ zu gelten berechtigt sind. Sie kommen zum Vorschein, wenn man den directen Werth $f(x)$ für einen

Punct $x_1 \lessgtr x$ bildet, sodann eine Schaar von Werthen $x_2, x_3, \ldots$ zwischen x_1 und x einschaltet, die dem x unbegrenzt sich nähern, und den Limes der Reihe $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3), \ldots$ aufsucht. Man gelangt so auf indirectem Wege zu Functionswerthen $f(x)$, welche von den direct erhaltenen verschieden sein können. Wir wollen sie indirecte Functionswerthe nennen.

Eine ganze rationale Function von x besitzt deren von den directen verschiedenen für keinen Werth von x, ebensowenig $\sin x$, e^x, und ähnliche Functionen. Betrachten wir dagegen die erste Function I des vorigen Art., so ist für $x = \frac{1}{3}$ ihr directer Functionswerth Null, aber der Limes von $f(0,3)$, $f(0,33)$, etc. ist 1.

Man wird einen indirecten Functionswerth für das Argument x durch $lim_{\varepsilon = 0} f(x + \varepsilon)$ bezeichnen. Es muss allerdings hinzugefügt werden, welche positive oder negative Werthreihe ε durchlaufend gedacht wird. Machen wir z. B. die Function I. a. zu einer vollständig gegebenen, indem wir allen freigelassenen Werthen des Arguments die Null als Functionswerth zuordnen, so bleibt 1 der Limes der Folge $f(0,3)$, $f(0,33), \ldots$, doch, obschon die Argumentwerthe $\frac{1}{2.3}, \frac{3}{4.3}, \frac{7}{8.3}, \ldots$ ebenfalls dem Werth $\frac{1}{3}$ unbegrenzt sich nähern, ist Null der Limes der Folge $f\left(\frac{1}{2.3}\right), f\left(\frac{3}{4.3}\right), \ldots$

Von Dirichlet*) rührt eine abgekürzte Bezeichnung für $lim_{\varepsilon = 0} f(x + \varepsilon)$ her, von der wir häufigen Gebrauch machen werden. Sie lautet:

$$f(x + 0) \text{ und } f(x - 0).$$

*) Repertorium der Physik von Dove und Moser, Bd. 1. pag. 170.

Mit $f(x+0)$ sind die indirecten Werthe $lim_{\varepsilon=0} f(x+\varepsilon)$ für positive Werthfolgen ε gemeint, wobei aber wie gesagt, falls dies nöthig ist, eine nähere Angabe über die Werthfolgen von ε beizufügen ist. Geschieht dies nicht, so möge das Zeichen den Inbegriff sämmtlicher positiven indirecten Werthe bedeuten, und von $f(x-0)$ gelte Analoges.

Bei allen Functionen II, III, IV treten indirecte von den directen verschiedene Functionswerthe auf.

In Function II a, die Eins für rationale, Null für irrationale Argument ist, sind für jeden Werth des Arguments die positiven und negativen indirecten Werthe zugleich Null und Eins.

Was die Function II b betrifft, so sind die directen Werthe Null oder $\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_r}$, jenachdem das Argument irrational oder rational mit dem Nenner $p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \cdots p_r^{\varrho_r}$ ist. Beiläufig bemerkt kann man idealistisch diese letztere Bestimmung auch die irrationalen Werthe einschliessend sich denken, wenn man die Irrationalen als Brüche mit unendlich vielen oder unendlich grossen Primfactoren im Nenner auffasst. Indessen kann eine Irrationale auch bei endlichen p durch Anwachsen der ϱ entstehen. Die indirecten Werthe sind für jedes Argument in unbegrenzter Menge vorhanden. Es sind nämlich für jedes Argument ohne Ausnahme diese:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots \frac{1}{2.3}, \frac{1}{2.5}, \cdots, \frac{1}{2.3.5} \cdots$$

weil im kleinsten einen Argumentwerth einschliessendem Intervall Zahlen der Form

$$\frac{Z}{2^{\varrho}}, \frac{Z}{3^{\varrho}}, \frac{Z}{2^{\varrho_1} 3^{\varrho_2}}, \cdots$$

vorkommen.

Die Function II c anlangend, so sind ihre indirecten

Werthe alle Null, da man um jedes Argument ein Intervall abgrenzen kann, in welchem keine Rationalzahl mit einem Nenner $p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \ldots p_r^{\varrho_r}$, der kleiner als eine beliebig grosse Zahl, erscheint.

Das Ausfallen directer Functionswerthe. Es ist kein seltenes Vorkommen, dass in einzelnen Argumentwerthen die directen Functionswerthe ausfallen, wofür die Functionen unter III. Beispiele sind. Denn da $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ jeden Sinn verliert, so sind die sämmtlichen Functionen III im Puncte $x = 0$ bestimmungslos. Dies gilt, was ich besonders hervorhebe, auch von der Function $x \sin \frac{1}{x}$, denn da $\sin \frac{1}{0}$ keine Grösse vorstellt, so kann man auch nicht $0 . \sin \frac{1}{0}$ gleich Null setzen.

Es hat $f(x) = \frac{1}{x}$ die indirecten Werthe $f(0+0) = +\infty$, $f(0-0) = -\infty$, darunter verstanden, dass diese Function bei Annäherung an $x = 0$ keinen Schranken für ihre Ab- und Zunahme begegnet.

Weiter hat $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ als indirecte Werthe: unbestimmt zwischen den Grenzen -1 und $+1$.

$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ hat die indirecten Werthe $f(0+0) = +\infty$, $f(0-0) = 0$.

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ hat die indirecten Werthe $f(0+0) = 1$, $f(0-0) = -1$.

Im Allgemeinen sind ausfallende Functionswerthe alle solche, die für einen Argumentwerth unendlich sind, wie es oft ausgedrückt wird, denn da unsere analytischen Operationen mit Grössen zwar Wachsthum über alle Grenzen aber kein idealistisches Unendlich ergeben können, so muss, wenn eine Function in Puncten scheinbar unendlich wird, irgend ein sinnloses Symbol, wie $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ diese Täuschung bewirken.

Wenn, wie in den vorstehenden Beispielen directe Werthe ausfallen, so hindert uns Nichts, sie unseren Zwecken gemäss zu ersetzen. Z. B. ist die Function $x \sin \frac{1}{x}$ eine vollständig gegebene, wenn ich noch die Bestimmung hinzufüge, dass sie Null für $x = 0$ sei.

Indirecte Grenzwerthe. Noch eine dritte Art von Functionswerthen spielt in der Analysis eine Rolle, und muss an dieser Stelle wenigstens erwähnt werden. Sie treten auf bei den Functionen, die als Ergebniss eines Grenzübergangs definirt werden, wofür die unter IV stehenden Functionen Beispiele sind.

Betrachten wir die Function $f(x) = lim_{h=\infty} \frac{1+hx}{1+hx^2}$. Man erhält die als Grenze definirte Function hier und in allen ähnlichen Fällen, falls keine andere Verfügung getroffen ist, dadurch, dass man erst dem x irgend einen festen Argumentwerth ertheilt sich denkt, und nachher h unendlich werden lässt.

Auf diese Weise findet man die directen Werthe $f(x) = lim \frac{1+hx}{1+hx^2} = \frac{1}{x}$ für $x \gtrless 0$, und $= 1$ für $x = 0$. Die indirecten

Werthe für $x = 0$ sind $+\infty$ und $-\infty$. Die indirecten Grenzwerthe für ein Argument x erhält man, indem man statt x einen davon verschiedenen Argumentwerth $x + \varepsilon$ in die Function hinter dem Zeichen *lim* einführt und alsdann zugleich h unendlich und ε Null werden lässt, wobei ε und h durch eine Relation verbunden sein müssen. Aus

$$\frac{1 + h(x + \varepsilon)}{1 + h(x + \varepsilon)^2}$$

folgt für $x = 0$:

$$\frac{1 + h\varepsilon}{1 + h\varepsilon^2}.$$

Die Relation zwischen ε und h sei z. B. $\varepsilon h = \gamma$. Der vorstehende Ausdruck wird:

$$\frac{1 + \gamma}{1 + \frac{\gamma^2}{h}},$$

wovon der Limes nach h ist:

$$1 + \gamma,$$

also bei der Willkürlichkeit von γ jeder beliebige Werth. Die indirecten Grenzwerthe füllen hier also die Distanz zwischen den äussersten Functionswerthen, die hier indirecte sind, aus. Ein Gleiches gilt von den andern Functionen IV. Die Function $lim_{h=\infty}\, aretg\, hx$ hat für $x = 0$ den directen Werth 0 und die indirecten $+\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Ihre indirecten Grenzwerthe füllen, wie leicht zu sehen, die Strecke zwischen den indirecten Functionswerthen $\pm\frac{\pi}{2}$ aus. Allein es muss sogleich betont werden, dass die indirecten Grenzwerthe auch ausserhalb der von den directen oder indirecten Functionswerthen eingeschlossenen Intervalle liegen können.

60. Ueber den Sprungwerth der Functionen.

Von besonderem Interesse ist der grösste Unterschied zwischen den Werthen einer Function, directen und indirecten, für einen besonderen Argumentwerth. Wir nennen Sprung diesen grössten Unterschied. Z. B. ist π der Sprung von *lim arctg hx* für $x = 0$.

Die Function II a, die Eins für rationale Argumente, sonst Null ist, hat für jedes Argument den Sprungwerth 1.

Bei der Function II b, die für jedes Argument der Form $\frac{Z}{p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \dots p_r^{\varrho_r}}$ den Werth $\frac{1}{p_1 p_2 \dots p_r}$ annimmt, und sonst Null ist, ist für jeden Werth des Arguments der Sprung $\frac{1}{2}$.

Bei der Function II c, die für $x = \frac{Z}{p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \dots p_r^{\varrho_r}}$ den Werth $\frac{1}{p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \dots p_r^{\varrho_r}}$ erhält, und sonst Null ist, ist für jeden solchen Werth x der Sprung $= \frac{1}{p_1^{\varrho_1} p_2^{\varrho_2} \dots p_r^{\varrho_r}}$, und in den irrationalen Argumentwerthen ist der Sprung Null.

Bei diesen Functionen höchst einfachen Baues macht der Begriff Sprung keine Schwierigkeit. Es kann aber bei verwickelteren Functionen die präcise Angabe dessen, was unter äussersten indirecten Werthen zu verstehen sei, minder nahe liegen. Für die meisten Anwendungen genügt eine Grösse, als deren Grenze der Sprung der Function anzusehen ist, nämlich die Schwankung der Function d. i. der grösste Unterschied der Functionswerthe in einem hinreichend kleinen, einen Punct einschliessenden Intervall. Auch dieser grösste Unterschied ist im Allgemeinen eine Grenze von Unterschieden von Functions-

werthen, deren Existenz wir weiter unten näher nachweisen werden. Eine Grenze ist sie, denn die Functionen nehmen die kleinsten Werthe, die sie nicht überschreiten, oder die grössten, die sie nicht unterschreiten, häufig nicht an, wofür die Functionen des Art. 58 ebensoviel Beispiele sind. Z. B. die Function I a nimmt nirgends ihren grössten Werth 1 an.

Von dieser Grenze der Unterschiede der Functionswerthe ist, wie gesagt, der Sprung seinerseits die Grenze, welche, wie folgt, erhalten wird.

Es handele sich um einen Argumentwerth x und wir bilden das Intervall

$$(x - \delta, x + \delta).$$

Darin sei g_o der kleinste Werth, den die Function nicht überschreitet, g_u der grösste den sie nicht unterschreitet, und deren Existenz wir, wie gesagt, alsbald nachweisen werden. Wenn δ abnimmt, kann g_o nicht zunehmen, g_u nicht abnehmen, und beide haben daher, nach dem II. Satze des folgenden Capitels feste Grenzen G_o und G_u, wenn wir der Einfachheit halber annehmen, dass die Functionswerthe, welche in Rechnung kommen, zwischen endlichen Schranken liegen. Die Grösse $G_o - G_u$ ist der Sprung der Function im Puncte x. Nur muss noch gezeigt werden, dass wenn das Intervall

$$(\alpha - \delta_1, x + \delta_2)$$

zu Grunde gelegt wird, wo δ_1 und δ_2 in irgend einem gegenseitigen Verhältniss Null werden, derselbe Limes $G_o - G_u$ erhalten wird. Wir wollen $\delta_1 > \delta_2$ annehmen, und folgende Bezeichnungen einführen. Es seien die Intervalle:

$$(x - \delta_1, x + \delta_1) = \Delta_{11}$$
$$(x - \delta_1, x + \delta_2) = \Delta_{12}$$
$$(x - \delta_2, x + \delta_2) = \Delta_{22}$$

und die Werthe g im Intervall Δ_{pq} werde ich $g^{(pq)}$ schreiben. Nun ist Δ_{22} in Δ_{12}, Δ_{12} in Δ_{11} enthalten. Man hat somit:

$$g_o^{(11)} \geqq g_o^{(12)} \geqq g_o^{(22)}$$
$$g_u^{11} \leqq g_u^{(12)} \leqq g_u^{(22)}.$$

Es kann daher der Limes von $g_o^{(12)}$ kein anderer als G_o, der von $g_u^{(12)}$ muss G_u sein.

Es muss noch bemerkt werden, dass man auch einseitige Sprungwerthe unterscheiden kann, die sich auf den Limes von g_o und g_u ein Intervall $(x-\delta, x)$ oder $(x, x+\delta)$ beziehen. Man wird im Anschluss an die Dirichlet'sche Bezeichnung diese Sprungwerthe als zum Argument $x-0$ oder zum Argument $x+0$ gehörig bezeichnen.

61. Ueber die Stetigkeit der Functionen in einzelnen Puncten des Arguments.

Eine Function heisst für einen Argumentwerth x stetig, wenn ihr Sprung für diesen Werth Null ist. Der Punct ist alsdann ein Stetigkeitspunct der Function. Sie heisst in einem Punct unstetig, wenn dort ihr Sprung nicht Null ist. Falls die Function bei der Annäherung an einen Punct x über alle Grenzen wächst, oder in dem Puncte selbst einen unbegrenzt grossen Werth annimmt, ist sie dort ebenfalls unstetig, weil in einem solchen Puncte ein Sprungwerth gar nicht existirt, indem die Grössen g_o oder g_u oder beide nicht angebbar sind. Er kann also auch nicht Null sein.

Es wird hier wieder eine einseitige Stetigkeit unterschieden werden müssen. Die Function $f(x)$ wird z. B. für einen Punct $x-0$ stetig sein, wenn ihr Sprungwerth für $x-0$ Null ist.

Gehen wir nicht aus von dem Sprungwerth der Function, sondern von ihrem grössten Werthunterschied in einer Strecke, dessen Grenze der Sprung ist, so lautet die Stetigkeitsbedingung:

Stetig ist die Function $f(x)$ im Punct x, wenn sich stets um diesen Punct ein hinreichend kleines Intervall abgrenzen lässt, so dass darin kein Unterschied der Functionswerthe $f(x)$ vorkommt, der grösser als eine beliebig klein anzunehmende Grösse ist.

In analytische Form gebracht, würde dies heissen: Es seien ε und ε_1 zwei Grössen irgend welchen Vorzeichens. Dann verlangt die Stetigkeit von $f(x)$ im Puncte x, dass es stets eine hinreichend kleine obere Grenze für die absoluten Werthe von ε und ε_1 gebe, damit der absolute Werth des Unterschieds

$$f(x+\varepsilon)-f(x+\varepsilon_1)$$

eine beliebig klein anzunehmende Grösse nicht erreichen kann.

Die gebräuchliche Stetigkeitsbedingung, welche nun wirklich dazu dient, Stetigkeitsbeweise zu führen, wird etwas anders formulirt. Sie benützt nur eine Grösse ε, und verlangt, dass stets eine hinreichend kleine obere Grenze des absoluten Werthes von ε angegeben werden kann, so dass, abgesehen vom Vorzeichen,

$$f(x)-f(x+\varepsilon)$$

unter einer beliebig klein anzunehmenden Grösse bleibt. Beide Formulirungen besagen ersichtlich dasselbe, da der erstere Ausdruck, den man auf die Form:

$$\big(f(x+\varepsilon)-f(x)\big)-\big(f(x+\varepsilon_1)-f(x)\big)$$

bringen kann, zugleich mit seinen beiden Theilen unter jede Grenze sinken muss, und der zweite Ausdruck aus dem ersten folgt, wenn man ε oder ε_1 Null setzt.

Legt man der Stetigkeitsbedingung den Ausdruck $f(x) - f(x+\varepsilon)$ zu Grunde, so leuchtet unmittelbar ein, dass, falls der Werth $f(x)$ nicht existirt, der Punct x auch kein Stetigkeitspunct ist. Er wird es nur, wenn dem ausfallenden Functionswerth $f(x)$ ein geeigneter Werth vorgeschrieben wird. So ist die Function $x \sin \frac{1}{x}$ im Puncte $x = 0$ erst dann als stetig anzusehen, wenn festgesetzt ist, dass sie dort Null sei.

Was die Functionen des Art. 58 anlangt, so kann bei den nicht vollständig gegebenen Functionen I von Stetigkeit keine Rede sein.

Von den Functionen II ist IIa und IIb für keinen Punct stetig. Die Function IIc ist in allen irrationalen Puncten stetig, in allen rationalen unstetig.

Die Functionen III und IV sind sämmtlich und die der Gruppe V zum Theil im Punct $x = 0$ unstetig.

62. Ueber die Stetigkeit von Functionen durch ganze Intervalle.

Nicht allein ist bei einer in einer Strecke stetigen Function in jedem Punct der Sprungwerth gleich Null, auch hinsichtlich der grössten Functionsunterschiede in einem Intervall der Stetigkeitsstrecke zeichnen solche Functionen sich aus. Wir haben oben gesehen, dass eine Function die obere Grenze ihrer Werthe in einem Intervall nicht wirklich anzunehmen braucht (Function Ia des Art. 58), wobei wir noch den Beweis für die Existenz einer solchen oberen Grenze schuldig sind. Nun lege ich hier noch einen ebenfalls weiter unten (Art. 64, III) zu beweisenden Satz zu Grunde, der besagt, dass eine in einem Intervall stetige Function dort wirklich kleinste und grösste Werthe und nicht blos obere und untere Grenzen ihrer Functions-

werthe besitzt. Hiernach ist also die Schwankung oder der grösste Werthunterschied in einem Intervall der stetigen Function der Unterschied von zwei dort wirklich vorkommenden Functionswerthen. Ist (x_1, x_2) das Intervall, $f(x)$ die Function, so hat mithin ihre Schwankung im Intervall (x_1, x_2) die Form $f(x'') - fx'$, wo $x_1 \leqq x' < x'' \leqq x_2$.

Wenn eine Function in jedem Punct eines Intervalls stetig ist, so sind dadurch offenbar für jeden Punct Beziehungen zu seinen Nachbarwerthen, mithin auch von Punct zu Punct zum ganzen Intervall gesetzt. Um dergleichen Beziehungen zum Ausdruck zu bringen, beschränken wir die stetige Function auf die Strecke $(0, 1)$, denken uns aber die Function in der Richtung $x > 1$ mit dem Werthe $f(1)$, in der Richtung $x < 0$ mit dem Werthe $f(0)$ fortgesetzt, um auch die Endpuncte des Intervalls $(0, 1)$ als innere Puncte behandeln zu können. Sodann führen wir gewisse Intervalle Δ ein.

Die Intervalle Δ. Der grösste Werthunterschied von $f(x)$ im Intervall $(0, 1)$ sei M, und μ sei eine Grösse $< M$. Weiter sei Δ dasjenige grösste durch einen Punct x halbirte und als zu diesem Punct gehörig gedachte Intervall, in welchem die Schwankung μ beträgt. Ich bemerke ausdrücklich, dass die Intervalle Δ nicht an das Intervall $(0, 1)$ gebunden sind, sondern vermöge der über die Fortsetzung von $f(x)$ getroffenen Verfügung sich über die Grenzen 0 und 1 hinaus erstrecken können, und für Puncte in der Nähe dieser Grenzen es auch stets thun werden. Durch x und μ ist Δ offenbar festgelegt, und man kann über diese Grösse Folgendes aussagen. Wir lassen zunächst x fest.

Es nimmt Δ zugleich mit μ ab und zu. Wenn μ zunimmt, so braucht, wie einfache Figuren, deren eine unten

bei Gelegenheit der Grösse Δ_0 vorgeführt wird, lehren, Δ nicht stetig zuzunehmen, muss aber ununterbrochen zunehmen. Denn angenommen, dass, während μ von μ_1 bis μ_2 wächst, Δ constant bleibt, aber für $\mu < \mu_1$ einen kleinen Werth Δ' besitzt, so müsste ein Werthunterschied $\mu_2 - \mu_1$ der Function $f(x)$ in den Unterschied der Intervalle Δ und Δ' fallen. Dieser besteht aus zwei Intervallen, die Null zur Grenze haben, wenn Δ' sich dem Δ nähert. Gleichviel also, wie der Unterschied $\mu_2 - \mu_1$ in diese Intervalle sich vertheilen möge, er bleibt darin, und lässt man die Intervalle kleiner und kleiner werden, so entspräche ihnen mindestens eine Unstetigkeit von $f(x)$. Somit folgt:

Wenn man μ stetig wachsend oder abnehmend sich denkt, so nimmt Δ zugleich zu oder ab, ohne je für zwei Werthe des μ denselben Werth anzunehmen. Aber Δ kann sich sprungweise ändern.

Weiter: Falls $f(x)$ in der Umgebung des betrachteten Werthes von x nicht constant ist, so sinken Δ und μ zugleich unter jede Grenze.

In der That wenn Δ oberhalb einer Grenze Δ_1 bleibt, während μ beliebig verkleinert wird, so kann es innerhalb Δ_1 keinen Functionsunterschied geben. Wenn aber der betrachtete Werth x in einem Intervall liegt, in welchem die Function constant ist, so kann Δ nicht unter die doppelte Entfernung zwischen x und dem ihm nächsten Ende des constanten Intervalles sinken.

Wir haben Δ als Function von μ betrachtet und setzen $\Delta = \varphi(x, \mu)$, da Δ offenbar auch von x abhängt. Nach dem was wir über die Beziehung von Δ zu μ wissen, können wir über die umgekehrte Function $\mu = \rho(x, \Delta)$ Folgendes aus-

sagen. Lassen wir Δ nach der Stetigkeit abnehmen, so wird an Stellen, wo Δ als Function von μ von einem Werthe Δ_1 zu einem davon verschiedenen Δ_2 plötzlich übergeht, μ einfach constant bleiben, während man Δ von Δ_1 bis Δ_2 stetig ändert.

Die Function $\mu = \varrho(x, \Delta)$ nimmt also für jeden Werth x, in dessen Umgebung $f(x)$ nicht constant ist, mit Δ unter jede Grenze ab, ohne je zuzunehmen. Sie kann indessen für Strecken des Arguments Δ unverändert bleiben. Für Puncte x, in deren Umgebung $f(x)$ constant ist, erreicht μ als Function von Δ die Null früher wie Δ, und bleibt dann Null, während Δ weiter abnimmt.

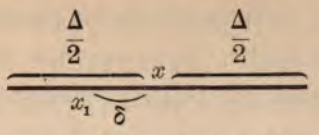
Schliesslich bemerke ich noch, dass für die nachfolgenden Betrachtungen auch das kleinste Intervall, in welchem die Schwankung der Function μ beträgt, benützt werden könnte, sowie auch nach beiden Definitionen die halben Intervalle $(x - \Delta, x)$, $(x, x + \Delta)$. Doch bleiben für jetzt wir bei der obigen Festsetzung.

Die Function $\Delta = \varphi(x, \mu)$ bei der Veränderung von x. Nachdem wir soeben die Veränderung von Δ bei festgehaltenem x untersuchten, lassen wir jetzt μ constant, und untersuchen Δ als Function von x. Hier gilt zunächst ein Satz, den wir Hrn. Lüroth*) verdanken.

Die Function Δ ist nach x stetig, hat demnach einen kleinsten Werth Δ_0 und nimmt ihn für irgend einen Werth x_0 an.

Wir nehmen im Intervall $\left(x - \frac{\Delta}{2}, x + \frac{\Delta}{2}\right)$ oder Δ

*) Math. Ann. VI. 319.



einen Punct x_1 an, der vom Punct x um δ entfernt ist. Dann folgt:

$$\tfrac{1}{2}\varphi(x_1, \mu) \geqq \tfrac{1}{2}\varphi(x, \mu) - \delta.$$

Denn bis $\frac{1}{2}\varphi(x, \mu) - \delta$ wird man $\frac{1}{2}\varphi(x_1, \mu)$ jedenfalls erweitern können, ohne dass der grösste Werthunterschied von $f(x)$ μ übersteigt. Ferner wird $\frac{1}{2}\varphi(x_1, \mu)$ nicht $> \frac{1}{2}\varphi(x, \mu) + \delta$ sein können, da man sonst das Intervall Δ erweitern könnte. Aus

$$\tfrac{1}{2}\varphi(x_1, \mu) \leqq \tfrac{1}{2}\varphi(x, \mu) + \delta \cdot$$
$$\tfrac{1}{2}\varphi(x_1, \mu) \geqq \tfrac{1}{2}\varphi(x, \mu) - \delta$$

folgt aber

$$-2\delta \leqq \varphi(x_1, \mu) - \varphi(x, \mu) \leqq 2\delta.$$

Da nun δ der absolute Werth von $x_1 - x$ ist, so sinkt in der That $\varphi(x_1, \mu) - \varphi(x, \mu)$ mit $x_1 - x$ unter jede Grenze.

Bemerkenswerth ist, dass vorstehende Ungleichheit, wenn man sie

$$-2 \leqq \frac{\varphi(x_1, \mu) - \varphi(x, \mu)}{x_1 - x} \leqq 2$$

schreibt, für den Differentialquotienten von φ nach x, gleichgültig ob er bestimmt oder unbestimmt ist, Grenzen vorschreibt. Also $\varphi(x, \mu)$ ist stetig, und nach dem Eingangs dieses Art. angeführten Satze giebt es, wie behauptet, einen kleinsten Werth Δ_0 von Δ und jedenfalls einen Punct $0 \leqq x \leqq 1$, auf den er fällt.

Das Minimum Δ_0 von $\Delta = \varphi(x, \mu)$. Die Beziehung zwischen μ und Δ_0 hat viel Aehnlichkeit mit der zwischen μ und $\Delta = \varphi(x, \mu)$ für ein festes x.

Es sinkt Δ_0 mit μ unter jede Grenze. Einem besonderen Werth μ entspricht ein bestimmter Werth Δ_0, und wenn μ sich verändert, verändert sich auch Δ_0, und zwar zugleich wachsend oder abnehmend. Aber Δ_0 braucht keine stetige Function von μ zu sein.

Mit μ muss Δ_0 unter jede Grenze sinken, denn für einen besonderen Werth von x, in dessen Umgebung $f(x)$ nicht constant ist, sinkt $\Delta = \varphi(x, \mu)$ mit μ unter jede Grenze. Nehmen wir einen solchen besonderen Werth x_1 an, so ist eben Δ_0 als Minimum stets $\leqq \varphi(x_1, \mu)$.

Weiter folgt aus der Bestimmung von Δ_0, dass jedem μ nur ein Δ_0 entspricht. Es muss noch gezeigt werden, dass zwei verschiedenen μ zwei verschiedene Δ_0 entsprechen. Angenommen sei, wir hätten μ bis μ_1 verringert, und beiden Werthen entsprächen gleichwerthige Minima Δ_0. Der Mittelpunct von Δ_0 für μ sei x_0, der von Δ_0 für μ_1 sei x_1. Es kann zunächst x_0 nicht $= x_1$ sein, weil $\varphi(x, \mu)$ bei festgehaltenem x mit μ sich ändert. Aber aus dem gleichen Grunde kann x_1 auch nicht verschieden von x sein, weil $\varphi(x_0, \mu_1)$ kleiner als Δ_0 ist. Also muss Δ_0 sich ändern, wenn μ sich ändert, und zwar muss es aus demselben Grunde und a fortiori abnehmen.

Stetig braucht Δ_0 als Function von μ nicht zu sein, wie folgende Figur zeigt, an der auch die Veränderung von $\Delta = \varphi(x, \mu)$ studirt werden kann:

Es stelle die stärker ausgezogene Linie die Function $f(x)$ vor, und es sei $\mu_1 < \mu < \mu_1 + \mu_2$. Dann wird das Minimum $\Delta_0 > a$ sein, bis μ auf μ_1 sinkt. Sobald $\mu = \mu_1$ ist, wird $\Delta_0 = b$.

Lässt man umgekehrt Δ_0 Argument sein, und μ sich entsprechend verändern, so ist das Verhalten von $\mu = P(\Delta_0)$ ganz ähnlich dem von $\mu = \rho(x, \Delta)$ für ein festes x, in dessen Umgebung $f(x)$ nicht constant ist.

$\mu = P(\Delta_0)$ nimmt mit Δ_0, ohne je zuzunehmen ab, kann während Δ_0 stetig abnimmt, streckenweise constant bleiben, sinkt aber mit Δ_0 unter jede Grenze.

Aus diesen einfachen Beziehungen schliessen wir mit leichter Mühe nützliche Sätze über die Stetigkeit der Functionen.

Aus $\mu = \rho(x, \Delta)$ folgt

$$f(x) - f(x + \Delta) = \rho(x, \Delta) \cdot K,$$

wo $K \leqq 2$, und $\rho(x, \Delta)$ eine, ohne je zuzunehmen, mit Δ unter jede Grenze sinkende Function. Setzen wir $2\rho(x, \Delta) = r(x, \Delta)$ so folgt:

$$f(x) - f(x + \Delta) = r(x, \Delta) \cdot K, \; K \leqq 1.$$

als Definitionsformel der Stetigkeit. Diese Formel gilt auch, wie man sich leicht überzeugt, wenn $f(x)$ nur im Puncte x stetig ist. Für die Beschaffenheit der Stetigkeit ist die Function $r(x, \Delta)$ charakteristisch. Sie ist die Grösse, die ich Grad der Stetigkeit im Puncte x genannt habe*) worauf ich an einer späteren Stelle zurückkomme.

*) Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, Tübingen bei H. Laupp, pag. 41, und Comptes Rendus, 18. April 1881.

Endlich ergiebt sich aus $\mu = P(\Delta_0)$, dass

$$f(x) - f(x + \Delta) = P(\Delta) . K, K \leqq 1,$$

für jeden Punct x des ganzen Intervalls $(0,1)$, worin also $P(\Delta)$ eine mit Δ, ohne je zuzunehmen, abnehmende und schliesslich unter jede Grenze sinkende Grösse bedeutet.

Diese Gleichung besagt, kurz und gut, dass der Stetigkeitgrad der Function ein Minimum hat, was ebensowenig der Fall zu sein brauchte, wie dass eine Function in einem Intervall einen kleinsten Werth habe, da sie ja auch unter jede Grenze sinken kann. Sieht man aber von dem an dieser Stelle noch nicht mit aller Präcision zu definirenden Stetigkeitsgrad ab, so liest man aus vorstehender Gleichung Folgendes heraus:

Für jede Grösse Δ lässt sich eine von Null verschiedene Grösse μ angeben, der Art, dass $\delta \leqq \Delta$ und $0 \leqq x \leqq 1$ angenommen,

$$f(x) - f(x + \delta) < \mu$$

sei.

Es sinkt also der Unterschied $f(x) - f(x + \delta)$ im ganzen Intervall zugleich unter jede Grenze, freilich nicht gleich schnell für die einzelnen Puncte. Aber es lassen sich beliebig rasch fallende Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ angeben und diesen Grössen Intervalle $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ zuordnen, so dass für $\delta \leqq \Delta_1, \leqq \Delta_2, \ldots f(x) - f(x + \delta)$ durch das ganze Intervall beziehlich $< \mu_1, \mu_2, \ldots$ sei. Diese wichtige Bemerkung hat Hr. Heine gemacht*), und dies Verhalten gleichmässige Stetigkeit genannt, eine Benennung, bei der ich dem

*) Borch. Journ. Bd. 74, pag. 188.

Entdecker nicht folgen möchte. Sie erweckt falsche Vorstellungen, wenn man mit dem Begriff des Stetigkeitsgrades ausgerüstet ist. Man würde alsdann eine Function gleichmässig stetig in einem Intervall eine Function nennen, die dort allerwärts den gleichen Stetigkeitgrad hat, wie durchweg e^x, $\sin x$. Und es ist dann ein Satz, dass Functionen nur gleichmässig stetig sein können, wenn Δ der Stetigkeitsgrad von $f(x) - f(x + \Delta)$ ist. Eine Function wird $\sqrt{x}$ wäre im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ nicht gleichmässig stetig, dann für $x = 0$ ist $\sqrt{\Delta}$ ihr Stetigkeitsgrad.

Es scheint mir den Sachverhalt am Besten wiederzugeben, wenn wir die Gleichung

$$f(x) - f(x + \Delta) = P(\Delta) K$$

das Princip vom Begrenztsein des Stetigkeitsgrades nennen.

63. Ueber die anorthoide Stetigkeit.

Die Bedingung der Stetigkeit innerhalb eines ganzen Intervalls enthält zwar eine bedeutende Einschränkung des allgemeinen Functionsbegriffs, doch darf man sie nicht überschätzen. Namentlich bewirkt sie nicht entfernt, dass wir ein ähnliches Bild vom Functionsverlauf lediglich jener Bedingung unterworfener Functionen gewinnen, wie wir es von den elementaren Functionen der Analysis besitzen. Vielmehr führt der Empirist pag. 143, 144 schon aus, dass die Trennungslinie oder vielleicht richtiger die Trennungszone der orthoiden und anorthoiden Abhängigkeit durch das Gebiet der stetigen Functionen geht, so dass es eine anorthoide Stetigkeit giebt, die übrigens ein besonders merkwürdiges Capitel der allgemeinen Functionentheorie ausmacht. Ja,

wenn man sich in diese Dinge vertieft, so überzeugt man sich bald, dass gerade die orthoide Stetigkeit den Charakter der Ausnahme, der Besonderheit gegenüber der a priori viel wahrscheinlicheren anorthoiden Stetigkeit besitzt. Doch wird dies bei der Theorie des Differentialquotienten genauer zu erörtern sein. An dieser Stelle möchte ich noch mit einigen Worten eingehen auf unser vom Idealisten pag. 147 betontes Unvermögen, von der anorthoiden Stetigkeit irgend eine Vorstellung uns zu bilden.

Ich knüpfe an die Functionengruppe V:

$$\Sigma \lambda_p \, sin, \; cos \, m_p x \; ^*)$$

des Art. 58 an. Diese analytische Form ist geeignet einen guten Theil der allgemeinen Functionentheorie mit lehrreichen Beispielen zu versehen. Auch werde ich ihr ein besonderes Capitel widmen. Je nach dem relativen Wachsthum von p, m_p, λ_p^{-1} liefert sie eine Stufenfolge von Functionen, die von den unbeschränktesten zu den stetigen Functionen complexer Variabeln führt.

Wir begegnen, wenn wir λ_p^{-1} gleichzeitig mit p erst genügend langsam wachsend annehmen, zuerst durchweg unstetigen nicht integrirbaren, dann durchweg unstetigen integrirbaren Functionen. Neben diesen Classen beginnt und setzt sich bei passender Bestimmung der m_p fort die Klasse der bis auf einzelne Puncte oder durchweg stetigen nicht differenzirbaren und der diffenzirbaren Functionen. Es folgt bei immer rascherer Zunahme der λ_p^{-1} und angemessener Zunahme der m_p die Menge der mit allen Differentialquotienten stetigen,

*) I. c. steht μ_p statt λ_p^{-1}, auch habe ich unbestimmt *sin*, *cos* geschrieben, weil für gewisse Beispiele der Sinus zweckmässiger ist.

aber nicht als Potenzreihen darstellbaren Functionen, und endlich gelangt man in den Bereich der als Potenzreihen darstellbaren Functionen der complexen Functionentheorie.

Wir denken uns nun eine Function $f(x) = lim_{n=\infty} f_n(x) = lim_{n=\infty} \sum_1^n \lambda_p \cos m_p$, die eine stetige anorthoide nicht differenzirbare Function darstellt. Nun, den Verlauf einer Function $\lambda_p \sin m_p x$ kann man sich vorstellen. Auch von der Function $f_n(x)$ kann man sich noch, wie gross n auch sei, eine saubere Zeichnung angefertigt denken, an der deutlich erkennbar, dass die Tangente keine feste Grenzlage besitzt, und die Function $f_n(x)$ wird in unseren Augen stets eine Flächenbegrenzung sein. Damit ist jedoch die Grenze des Vorstellbaren erreicht. Sobald man von der Function $f(x)$ zur Function $f(x) = lim_{n=\infty} f_n(x)$ übergeht, hört jede Vorstellung auf. Ich bemerke ausdrücklich, dass sie nicht etwa wegen zu grosser Zusammengesetztheit unvorstellbar ist, sondern sie ist es im Princip, wie das Unendliche, das Unendlichkleine, die Wirkung in die Ferne, wie das wahre Wesen der Dinge, wie Vorhandenes zu dessen Wahrnehmung Sinne nothwendig wären, die wir nicht besitzen.

Die anorthoiden Functionen können keinem Bilde entsprechen, *und es kann auch kein Functionsbild als eine Annäherung an eine solche Function gelten.*

Wenn man die Anzahl n in $f_n(x)$ in Unbegrenzte wachsend sich denkt, so fallen in jedes Intervall zwischen dyadischen Zahlen mit entsprechend anwachsenden Nennern Maxima der oscillirenden Function. Geht man zur idealistischen Grenze über, so wird aus den dyadischen Zahlen die vollständige Pantachie,

und in den Zwischenräumen zwischen den Zahlen bleiben die Maxima. Um eine wirkliche Vorstellung von der Function $f(x)$ zu erhalten, wäre also Vorbedingung, dass man die idealistische vollständige Pantachie sich vorstellen, oder doch annähernd sich vorstellen könnte. Wir sahen oben, dass dies unmöglich ist. Dazu kommt aber noch die wesentliche Forderung, dass man sich ein Bild vom Unendlichkleinen im Verhältniss zum Endlichen machen müsste, was ebenfalls unmöglich ist.

Idealistisch bleibt daher allerdings die geometrische Zuordnung der Functionswerthe zur vollständigen Pantachie der Argumentwerthe einfach bestehen, aber ohne auch nur annähernd einem Bild zu entsprechen. So ist es denn auch nicht unmöglich, dass Betrachtungen und Schlüsse, denen der Zusammenhang der Werthe von $f_n(x)$ zu Grunde liegt, falls sie auf das geometrische Functionsäquivalent von $f(x)$, wie der Idealist es nennt, ausgedehnt werden, Paradoxes ergeben.

Kann der Empirist sich ein annäherndes Bild von der anorthoiden Abhängigkeit machen? Der natürlich erst recht nicht, denn sie ist für ihn ebensowenig vorhanden, wie als Punctsystem die vollständige Pantachie. Empiristisch bedeutet die vorstehende Function $f(x)$ lediglich eine Vorschrift, welche zu jedem Argumentwerth einen Functionswerth mit beliebiger Annäherung zu berechnen gestattet. Sie bestimmt also zu jedem rationalen, sowie zu jedem irrationalen Argument, oder zu jedem Gesetz, das einem irrationalen Argumentwerth entspricht, ein zugehöriges den Functionswerth gleichsam vertretendes Gesetz.

64 Ueber die numerische Construction hypothetischer Functionswerthe.

Das geometrische Bild der Functionen, die ein solches besitzen, überhebt uns mancher Beweise für das gelegentlich

vorauszusetzende Vorhandensein gewisser Einzelwerthe der Function, wie z. B. grösster und kleinster Functionswerthe in einem Intervall.

Wenn sowohl ein Beweis wie eine Erklärung schliesslich hinausläuft auf eine uns befriedigende Verkettung von Vorstellungen, die eine uns beunruhigende Vorstellung mit einer uns vertrauten Endvorstellung verbindet, so kann das Curvenbild der Functionen als vertraute Endvorstellung uns völlig genügen. Man wird es der mathematischen Präcision zu Liebe gebührend einschränken, und von solchen Curven vielleicht verlangen, dass ihr Verlauf die wesentlichen Eigenschaften der algebraischen Curven besitze.

Nun, die Betrachtungen des vorigen Artikels lehren, dass jedenfalls bei den anorthoiden Functionen es an einer derartigen vertrauten Endvorstellung gänzlich gebricht. Bei ihnen giebt es keine feste und deutliche Anschauung, auf die wir uns berufen könnten. Die Analogie der vorstellbaren Curven kann Richtiges ergeben, allein wir haben keine Gewähr dafür. Beispielsweise wird Niemand einen Beweis nöthig erachten für den Satz, dass eine Function wie x^n, $\sin x$, etc. zwischen zwei Puncten, die sie stetig verbindet, jeden beliebigen Zwischenwerth annimmt. Bei anorthoiden Functionen ist dieser Satz aber keine Evidenz. Ihr empiristisches Bild ist doch stets nur eine beliebig zahlreiche Schaar von getrennten Puncten, und daher wird der Satz auch nur aus der analytischen Stetigkeitsbedingung gefolgert werden können.

Sobald wir dem Curvenbild eine grössere Mannigfaltigkeit gestatten, als sie der Begriff z. B. der algebraischen Curven gewährt, zeigt sich, dass die Anschauung, falls überhaupt von einer solchen die Rede sein kann, nur dann zuverlässig ist, wenn ihr die ausreichende Erfahrung zur

Seite steht. Ein recht lehrreiches Beispiel hierfür bietet der Satz, dass eine in einem Intervall stets endliche Function dort einen grössten und einen kleinsten Werth erhält, den jeder Laie im Erfahrungsbereich der Functionentheorie sogleich einzuräumen bereit ist. Und doch ist er falsch, schon für Functionen die bis auf einzelne Puncte orthoid sich verhalten. Indessen wissen wir dies eben nur, weil zuerst die Unstetigkeiten der Fourier'schen Darstellungen, und seitdem ungezählte anderweitige Beispiele wie die Function Ia des Art. 58 uns darüber belehrt haben.

Uebrigens werden aus der Anschauung vielfach Grenzabhängigkeiten gefolgert, deren Existenz zwar nicht in Frage gestellt werden soll, die aber wegen ihrer für den Idealisten und den Empiristen gleich zusammengesetzten Entstehungsart, keineswegs als mathematisch befriedigend abgeleitet angesehen werden können. Ich denke u. A. an die Umhüllungscurven, die man auf doppelte Weise entstehen lässt. Eine Enveloppe ist entweder (idealistisch) der Ort successiver Schnittpuncte der unendlich vielen Individuen der unendlich dichten Curvenschaar, oder die Umgrenzung des Limes des Gesammtgebiets, welches die von den einzelnen Curven begrenzten Flächenstücke bedecken.

Es handele sich z. B. um Kreis-Enveloppen. Im einfachsten Falle, wo die Mittelpuncte einer Schaar gleicher Kreise auf einer Geraden liegen, ist die Enveloppe augenfällig eine dieser Geraden parallele Gerade. Allein wenn entweder die Kreise nicht gleich sind, oder der Ort ihrer Mittelpuncte keine Gerade ist, oder Beides eintritt, so ist auch bei den gewöhnlichsten Functionen die Entstehung der Umhüllungscurve oder ihrer einzelnen Puncte keine so in die Augen springende mathematische Nothwendigkeit, dass man nicht das Bedürfniss

einer schärferen Ableitung, als es die gebräuchliche ist, lebhaft empfände. Wie viel mehr wird dies der Fall sein, wenn die Mittelpuncte oder die Radien der Kreise anorthoidisch sich verändern! Lässt man die Enveloppe z. B. aus der Vorstellung entspringen, dass die Kreise ein Gebiet bedecken, dessen Limes bei der Vermehrung ihrer Anzahl die Kreis-Enveloppe zur Begrenzung hat, so wird diese ebenfalls anorthoidisch sein. Da wir nun aber sahen, dass eine anorthoidische Abhängigkeit, die empiristisch doch nur ein beliebig dichtes Punctsystem ist, nicht als Begrenzung eines Gebietes angesehen werden könne, so ist das Ergebniss dieser Ueberlegung, dass auf solche Weise die Existenz der Function, die der Umhüllungscurve entspricht, nicht bewiesen werden kann.

Das Verfahren, die Existenz hypothetischer Functionswerthe zu beweisen, besteht darin, dass ihre numerische Darstellbarkeit nachgewiesen wird, z. B. durch einen fortlaufenden Decimalbruch, dessen einzelne Stellen ausgerechnet werden könnten, wenn man an Stelle der unbestimmt gelassenen Grössen des Problems bestimmte gegeben sich denkt. Ich habe oben (pag. 173), indem ich die Grenze einer Folge zunehmender Grössen darstellte, bereits ein Beispiel solcher numerischen Constructionen, wie ich sie dort genannt habe, gegeben, und werde in diesem Artikel einige weitere hypothetische Functionswerthe numerisch construiren, wobei meine Wahl auf Sätze fiel, die besonders häufig herangezogen werden, und auf welche nicht selten andere ähnliche Sätze sich zurückführen lassen. Ich bemerke jedoch, dass hier an ein Erschöpfen des Gegenstandes, oder auch nur an eine Uebersicht über die möglichen Arten hypothetischer numerisch darzustellender Functionswerthe, welche die Forschung

in der allgemeinen Functionentheorie an den Tag bringen kann, nicht zu denken ist.

I. Für jede Function $f(x)$ und jedes Intervall (a, b) ihres Arguments, in welchem sie zwischen endlichen Schranken verbleibt, giebt es einen kleinsten Werth, den sie im Intervall (a, b) nicht überschreitet, und einen grössten, den sie nicht unterschreitet. Wir nennen diese Werthe bezüglich obere und untere Grenze der Functionswerthe.

Beweis für die Existenz der oberen Grenze. Wir nehmen, was keine Beschränkung ist, die Function $f(x)$ im Intervall (a, b) positiv an und setzen diese Grössenintervalle fest:

$$0 \leqq y \leqq 1,\ 1 < y \leqq 2,\ 2 < y \leqq 3,\ \text{etc.},\ n < y \leqq n+1.$$

Betrachten wir nun den Inbegriff der Functionswerthe $f(x)$ im Intervall (a, b), so wird es ein letztes Intervall $\alpha_0 < y \leqq \alpha_0 + 1$ geben, in welches noch dem Intervall (a, b) angehörige Functionswerthe von $f(x)$ fallen.

Von einer ähnlichen Behauptung gehen die meisten einschlägigen Beweise aus. Da nun darin ein Inbegriff von Functionswerthen auftritt, so müssen wir sie uns näher ansehen. Für den Idealisten ist sie durchaus unanstössig. Er denkt an sein geometrisches Functionsäquivalent bestehend aus allen auf allen Argumentwerthen einer Strecke (a, b) errichteten Functionswerthen, und für die Frage, ob in ein vorausgesetztes Grössenintervall Functionswerthe dieses Inbegriffs fallen oder nicht, kann es ihm gleichgültig sein, ob der Functionswerthe eine endliche oder eine unendliche Anzahl ist. Entweder fallen in das Grössenintervall Functionswerthe, oder

es gehören ihm keine an, tertium non datur. Der Empirist stösst dagegen auf Bedenken, die sein Argumentbegriff erzeugt, indem die vollständige Pantachie der gleichzeitig vorhandenen Argumentwerthe, und der ihnen zugeordneten, ihrer Grösse nach vergleichbaren Functionswerthe für ihn nicht existirt. Doch hilft über diese Bedenken die im Anfang dieses Capitels hergeleitete empiristische Beschränkung des allgemeinen Functionsbegriffs hinweg. Der Empirist kann eben keinen allgemeineren zu Grunde legen. Lässt man es bei dem empiristischen Functionsbegriff bewenden, so ist unsere Behauptung gleichfalls unanstössig. Denn eine empiristische Function besteht aus Vorschriften, die für einzelne abzählbare Punctmengen des Arguments gelten und aus einer allgemeinen Vorschrift für den Rest der vollständigen Argumentpantachie. Betrachten wir zuerst diese letztere allgemeine Vorschrift, ohne die ausgenommenen Puncte zu berücksichtigen. Wie man sich diese Vorschrift auch denken mag, analytisch oder zahlentheoretisch, sie muss doch in der Idee gestatten zu entscheiden, ob die Relationen

$$n < f(x) \leqq n + 1, \; a \leqq x \leqq b,$$

zusammenbestehen können oder nicht. Dies ist das logische Residuum der Frage, die empiristisch unumgängliche Voraussetzung. Was die ausgenommenen abzählbaren Vielheiten von Functionswerthen betrifft, so hat es bei ihnen stets einen guten Sinn von einer oberen und einer unteren Grenze ihrer Werthe zu reden, wie aus der im folgenden Capitel vorzutragenden Lehre von den Unbestimmtheitsgrenzen folgt. Allein für den gegenwärtigen Beweis brauchen wir nur auf die Evidenz uns zu berufen, dass die Einzelwerthe einer beliebigen Folge stets endlicher Grössen eine vorgelegte Grösse entweder einmal übersteigen oder nicht.

Nach dieser Erörterung ist die Fortsetzung des Beweises sehr einfach. Es war $\alpha_0 < y \leqq \alpha_0 + 1$ das letzte Intervall der Folge von Intervallen:

$$0 \leqq y \leqq 1, \; 1 < y \leqq 2, \; 2 < y \leqq 3, \text{ etc.}$$

in welches der Argumentstecke (a, b) angehörige Werthe der Function $f(x)$ fielen. Wir theilen das Intervall $\alpha_0 < y \leqq \alpha_0 + 1$ in Zehntel:

$$\alpha_0 + \frac{n}{10} < y \leqq \alpha_0 + \frac{n+1}{10}, \; n = 0, 1, 2, \ldots 9.$$

Dann wird es unter diesen neuen Intervallen wieder ein letztes geben, welches Functionswerthe $f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, enthält. Für dies letzte sei $n = \alpha_1$. So fahren wir fort. Als Limes dieses Processes ergiebt sich ein Werth:

$$y = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots,$$

welcher die in Rede stehende obere Grenze der Functionswerthe $f(x)$ im Intervall (a, b) ist. Denn nach seiner Entstehung ist es unmöglich, dass ihn ein besonderer Functionswerth überschreite, weil die Functionswerthe für keinen Werth von p die Grösse $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots (\alpha_p + 1)$ übersteigen, und zwischen dieser Grösse und dem endlosen Decimalbruch $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$ ein mit wachsendem p unter jede Schranke sinkender Unterschied besteht. Es giebt aber auch keinen kleineren Werth, der dieselbe Eigenschaft hat. Denn jeder kleinere Werth wird überschritten von einem Werthe der Form $y = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$, und jeder solche Werth wird von Functionswerthen überschritten.

Zusatz. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass der Satz auch gilt im Falle eines unbegrenzt grossen Intervalls, wenn dies Intervall z. B. die sämmtlichen Argumentwerthe $x \geqq a$ umfasst, ein Intervall das wir (a, ∞) schreiben

wollen. Denn durch die Substituton $x = \frac{1}{y}$ wird zu jedem Argument des Intervalls (a, ∞) ein und nur ein Argument des Intervalls $\left(\frac{1}{a}, 0\right)$ zugeordnet.

An diesen für Functionen im Allgemeinen gültigen Satz schliessen andere sich an, welche Bezug haben, auf Functionen, die gewissen Beschränkungen, wie zunächst der Integrirbarkeit, dann der Stetigkeit unterworfen sind. Während die integrirbare Anorthoidie später zur Sprache kommen wird, sollen gleich hier einige besonders nützliche Sätze bewiesen werden, die bis zur Stetigkeit beschränkte Functionen betreffen, auf deren einen wir übrigens schon mehrfach uns gestützt haben. Sie sind naheliegende Folgerungen aus folgendem wohl auf seinen einfachsten Ausdruck gebrachten Satz:

II. Eine Function $f(x)$ sei im Intervall $(0, 1)$ stetig, weiter sei $f(0) > f(1)$, endlich genüge ein sonst beliebig anzunehmender Werth y' der Ungleichheit $f(0) > y' \geqq f(1)$. Stets giebt es sodann einen *kleinsten* Werth x', dabei $0 < x' \leqq 1$ gedacht, für welchen $f(x') = y'$ ist.

Beweis. Wir theilen das Intervall $(0, 1)$ in Zehntel:

$$0 \leqq x \leqq 0,1;\ 0,1 < x \leqq 0,2, \text{ etc.}$$

und es sei $0, \alpha_1 < x \leqq 0, \alpha_1 + 1$ das erste Zehntel, in welchem die Functionswerthe nicht durchweg $> y'$ sind. Das Intervall $0, \alpha_1 < x \leqq 0, \alpha_1 + 1$ theilen wir wieder in Zehntel, und es sei $0, \alpha_1 \alpha_2 < x \leqq 0, \alpha_1 \alpha_2 + 1$ das erste Hundertstel, in welchem die Functionswerthe nicht sämmtlich $> y'$ sind, u. s. f. Sodann sei

$$x' = 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots .$$

Es ist zu zeigen, dass $f(x') = y'$ ist.

Im Intervall $0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \leqq x < 0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p + 1$ seien $y_g^{(p)}, y_k^{(p)}$ resp. die obere und die untere Grenze der Functionswerthe von $f(x)$. Wir haben zugleich:

$$y_g^{(p)} \geqq y' \geqq y_k^{(p)}$$

$$y_g^{(p)} \geqq f(x') \geqq y_k^{(p)}.$$

Da nun der Unterschied zwischen $y_g^{(p)}$ und $y_k^{(p)}$ durch Vergrösserung von p beliebig verkleinert werden kann, so ist ein Unterschied zwischen y' und $f(x')$ unmöglich, da er doch von p unabhängig sein müsste.

Handelt es sich um das Intervall (a, b) statt $(0, 1)$, in welchem die Function stetig ist, so sehe man ihr Argument $x\, a + \varkappa (b - a)$, und $\varkappa$ wird von 0 bis 1 gehen, während x von a bis b sich bewegt.

Aus dem vorstehenden Satz folgt ohne Weiteres:

IIa. Falls eine Function $f(x)$ in einem Intervall (a, b) stetig ist, so giebt es für jeden *zwischen* $f(a)$ und $f(b)$ gelegenen Werth y' einen *zwischen* a und b gelegenen Werth x', von der Art, dass $f(x') = y'$. Sind solcher Zwischenwerthe x' mehrere vorhanden, so befindet sich darunter ein kleinster x'_1 und ein grösster x'_2. Für sie gelten also die Beziehungen:

$$a < x'_1 < x'_2 < b$$

$$f(a) \gtrless f(x'_1) = f(x'_2) = y' \gtrless f(b).$$

Der dritte hierher gehörige Satz lautet:

III. Eine in einem Intervall (a, b) stetige Function $f(x)$ wird darin ihrer oberen und ihrer unteren Grenze irgendwo gleich*).

*) Dieser Satz III wird nach Hrn. Weierstrass benannt, der ihn

Beweis. Es genügt den Satz in Bezug auf z. B. die obere Grenze zu beweisen.

Ich setze $f(a)$ und $f(b)$ zunächst verschieden voraus, und es sei z. B. $f(a) < f(b)$ Auch ist eine nachträglich leicht aufzuhebende Beschränkung, wenn noch der Kürze halber $f(a) = 0$ angenommen wird. Nun sei $h = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots$ die obere Grenze der Functionswerthe $f(x)$ im Intervall (a, b), so nimmt, nach der Definition der oberen Grenze, die Function in (a, b) Werthe an, die zwischen den Grössenunterschied $(h-\delta, h)$ fallen, wie klein auch δ sei. Wir nehmen an $h-\delta > \beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p$, und ein Functionswerth $f_{h-\delta}$ genüge der Bedingung $h-\delta < f_{h-\delta} < h$. Dann kann man die Grössen: β_0; β_0, β_1; $\beta_0, \beta_1 \beta_2$; $\ldots$ $\beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p$ im Sinne des Satzes II auffassen als Zwischenwerthe von $f(x)$ zwischen $f(a) = 0$ und $f_{h-\delta}$, denen kleinste Zwischenwerthe des Arguments $x_0, x_1, x_2, \ldots x_p$ angehören. Indem wir δ verringern, können wir entsprechend p vergrössern. Das Ergebniss ist, dass der unbegrenzten Folge β_0; β_0, β_1; etc. eine unbegrenzte Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ stets wachsender, b nicht erreichender Werthe entspricht, die mithin eine Grenze besitzt, welche wir X nennen.

Es soll also bewiesen werden $f(X) = h$. Wir grenzen um X ein kleines Intervall Δ ab. Ihm werden Functionswerthe $\beta_0, \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_p$ angehören, die ich $h - \delta_p$ schreiben

---

in seinen Vorlesungen beweist und verwendet. Er ist ohne Beweis veröffentlicht durch Hrn. Schwarz (Borch. Journ. Bd. 72, pag. 141, Anm.) in der Form: »Eine in einem Intervall $(a \ldots b)$ (die Grenzen incl.) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\varphi(x)$ erreicht das Maximum g der Werthe, welche sie annehmen kann, zum Mindesten für einen Werth x_0 der Veränderlichen, so dass $\varphi(x_0) = g$.« Jedenfalls hat Hr. Weierstrass zuerst auf die Nothwendigkeit, dergleichen Sätze aufzustellen und zu beweisen, die Aufmerksamkeit gelenkt.

will, wo also δ_p mit wachsendem p, oder mit abnehmendem Δ unter jede Grenze sinkt. Es sei τ der grösste Unterschied der Functionswerthe $f(x)$ im Intervall Δ. Dann ist der Unterschied zwischen $f(X)$ und $h - \delta_p$ nicht grösser als τ, oder der zwischen $f(X)$ und h nicht grösser als $\tau + \delta_p$. Es ist daher ein Unterschied zwischen $f(X)$ und h unmöglich, da durch Zusammenziehung des Intervalles Δ die Grösse $\tau + \delta_p$ beliebig verkleinert werden kann, $f(X)$ und h vom Intervall Δ aber ganz unabhängig sind.

Falls $f(a) = f(b)$ ist, ist die numerische Construction des Punctes X ganz ähnlich, nur im Falle beide Endwerthe des Intervalls (a, b) obere oder untere Grenze sind, ist das Nöthige zu ändern.

Dann ergiebt sich insbesondere:

IIIa. Wenn eine Function $f(x)$ in einem Intervall (a, b) stetig ist, und man hat $f(a) = f(b)$, so wird sie in diesem Intervall für Zwischenwerthe $a < x < b$ ihrer oberen und ihrer unteren Grenze gleich, falls die Werthe $f(a) = f(b)$ nicht selbst obere oder untere Grenze sind. Ist z. B. $f(a) = f(b)$ untere Grenze, so braucht $f(x)$ für keinen Zwischenwerth ihr gleich zu werden, wird aber, wenn nicht durchweg $f(x) = f(a) = f(b)$, für irgend einen Zwischenwerth ihrer oberen Grenze gleich.

Die numerische Construction der Puncte der Umhüllungslinien ist analog, und bietet kein neues Interesse allgemeiner Natur, so dass ich hier nicht länger dabei verweile *).

*) Näheres findet man Leipr. math. Ann. Bd. 18, pag. 597.

Ich wende mich nun zum letzten Capitel dieser Elemente, nämlich zur Betrachtung einer Function nicht in einem festen Intervall, sondern bei ins Unbegrenzte wachsendem Argument. Die allgemeinen Eigenschaften des Functionsverlaufs, die sich dabei ergeben werden, betreffen natürlich auch den Verlauf der Function bei Annäherung an einen besonderen Punct ihres Arguments.

Cap. V.

Ueber den Endverlauf der Functionen.

65. Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip und der Endverlauf der Functionen, deren Argument ins Unbegrenzte wächst.

Wir haben im vorigen Kapitel den Begriff der Zuordnung der Function zum Argument im weitesten Sinne und mit aller Strenge zu entwickeln versucht, wobei es genügte, das Intervall der Argumentwerthe endlich vorauszusetzen. Erstreckt es sich ins Unbegrenzte, und sind ihm fort und fort Functionswerthe zugeordnet, so würden zunächst wiederum die idealistischen gesetzlosen Folgen in Frage kommen. Doch lehrt die Musterung aller beim Endverlauf der Functionen, d. i. bei schrankenlosem Wachsthum ihres Arguments denkbaren Möglichkeiten, dass, unabhängig von den Grundanschauungen idealistischer oder empiristischer Natur, diesem Endverlauf gewisse allgemeine Eigenschaften zukommen, dass dabei ausnahmslos gewisse Grössen und Aenderungsformen auftreten, deren genaue Feststellung für Grenz- und Convergenzbetrachtungen aller Art unerlässlich ist, und den Gegenstand dieses Capitels bildet.

An die Spitze stelle ich das allgemeine Convergenzprincip, eine Eigenschaft des Endverlaufs der Functionen, welche das Vorhandensein einer festen endlichen Grenze $lim\ f(x)$ zur Folge hat.

Hierauf wird der Endverlauf solcher Functionen unter-

sucht, die keinen endlichen festen Limes haben, wobei zwei feste Grössen zum Vorschein kommen, welche dem Limes des convergenten Endverlaufs entsprechen und bei einem solchen auch unter sich und diesem Limes gleich werden. Dies sind die Unbestimmtheitsgrenzen, mit deren Hilfe sogleich das allgemeine Divergenzprincip gefolgert wird, nach welchem der Endverlauf von Functionen, denen die im allgemeinen Convergenzprincip vorausgesetzte Eigenschaft fehlt, auch nicht mit einem festen endlichen Limes abschliesst.

Jene Untersuchung des Endverlaufs der Functionen, welche die Unbestimmtheitsgrenzen ergab, wird sodann späteren Bedürfnisses wegen fortgesetzt, und führt zur Erkenntniss, dass der Endverlauf jeder irgendwie oscillirenden Function eingeschlossen ist zwischen zwei monoton*) sich ändernden Functionen, die ich Unbestimmtheitsenveloppen nenne.

Schliesslich ist die relative Geschwindigkeit, mit welcher nur monoton verlaufende Functionen wachsen oder abnehmen, in Betracht zu ziehen, wobei der Begriff der infinitären Grössenfolge auftritt.

Den letzteren Gegenstand ausgenommen, der wieder auf die Grundanschauungen zurückweist, sind die oben angekündigten Erörterungen der Art, dass der idealistisch-empiristische Gegensatz nur bei dem Begriff: Grenze von numerischen Constructionen oder allgemeiner von monoton sich ändernden discreten Werthfolgen zur Geltung kommt, und zwar nur insofern ein genauer oder beliebig genauer Werth als Grenze

*) Diesen von Herrn C. Neumann neuerdings eingeführten bequemen Ausdruck werde ich fortan statt des in dieser Schrift pag. 9, Anm. angekündigten: »einsinnig« anwenden. Angesichts des Umstandes, dass der Druck dieses Heftes vor vier Jahren begann, wird man mir diese kleine Inconsequenz nachsehen.

angesehen wird. Es gilt dies insbesondere von den Schlüssen, durch welche wir das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip nachweisen. Wir dürfen es unterlassen, die beiden Anschauungsformen bei jedem Schritt auseinanderzuhalten, und können von den Grenzwerthen so reden, wie der Idealist es thun würde. Ich komme hierauf an dieser Stelle zurück, weil wir gegenwärtig an den Grenzbegriff die letzte Hand legen. Seinen wesentlichsten, wenn auch einfachsten Bestandtheil, die Grenze discreter monotoner Werthfolgen, wiesen wir dem Gebiet des Grössenbegriffs zu, das nur auf diese Weise befriedigend abzuschliessen war. So gehört zwar ein Theil des Grenzbegriffs dem Grössenbegriff an, allein er hat noch einen weiteren ihm natürlich zustehenden Umfang, nämlich die Aufstellung der allgemeinen Bedingungen, unter denen irgend welche auf lineäres Grössenmaass zurückführbare Vorgänge eine Grenze haben oder nicht. Diese Bedingungen enthält das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip.

Wenn also dieses Princip idealistisch wie empiristisch erwiesen ist, so sind die letzten Grundlagen der Analysis, die Begriffe von Grösse und Grenze, beide durchaus gefestigt, und der Lehrer in Schrift und Wort hat keinen Anlass mehr, »den Zugang zur Analysis mit raschen Schritten zu durcheilen« (pag. 2).

66. Das allgemeine Convergenz- und Divergenzprincip. Vorbemerkung.

Wir gaben dem allgemeinen Convergenz- und Divergenzprincip pag. 6 die Form:

Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$ gedacht, von einem hinreichend grossen Werth von $f(x)$ an und für beliebige Werthe des Unterschiedes $x_1 - x$ unter einer beliebig klein ange-

nommenen Zahl bleibt, so hat die Function $f(x)$ einen bestimmten Grenzwerth. Wenn aber nach jedem noch so grossen Werth von x sich Unterschiede $f(x_1) - f(x)$, stets $x_1 > x$ gedacht, nachweisen lassen, die grösser als eine beliebig kleine, aber unabhängig vom vorrückenden x gedachte Grösse sind, so hat $f(x)$ keine Grenze.

Hienach zerfällt unsere Untersuchung in zwei Theile, von denen der erste blos das Convergenzprincip, d. i. das Verhalten berücksichtigt, bei dem $f(x)$ eine Grenze hat, der zweite aber die weitaus umfassendere Möglichkeit des Nichtvorhandenseins einer Grenze ins Auge fasst.

Indem wir, um das Divergenzprincip zu beweisen, die mannigfaltigen Arten, wie eine Function ihrem Argument ins Unbegrenzte folgt, durch feste Grenzpunkte einschliessen: erkennen wir von höherem Gesichtspuncte aus, unter welchen Umständen das Besondere auftritt, welches Grenze genannt wird, und gewinnen so ein wirkliches Verständniss des allgemeinen Princips.

Die Function $f(x)$ sei möglich schrankenlos. Namentlich bemerke ich, dass man zwar der Bequemlichkeit halber $f(x)$ für alle besonderen Werthe des Arguments gegeben, darunter also eine vollständig bestimmte Function (Art. 57) sich denken kann, dass unsere Schlüsse ihr aber nirgends eine solche Beschränkung auferlegen. Wenn daher von einer Function $f(x)$ von x die Rede ist, so handelt es sich nur um diejenigen x, für welche sie vorgeschrieben ist. Ich denke dabei u. A. an die Function $f(n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, welche die Summe der ersten n Glieder einer Reihe vorstellt, und die nur für ganzzahlige $x = n$ vorhanden ist.

67. Das allgemeine Convergenzprincip mit seinen begleitenden Sätzen.

Es ist also der Verlauf des Unterschiedes $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, bei ins Unbegrenzte zunehmendem x, der eine erste Classification des Endverlaufs der Functionen bewirkt.

Der erste Satz ist die Umkehrung einer aus der wesentlichen Eigenschaft der Grenze unmittelbar einleuchtenden Folgerung. Hat $f(x)$ bei unbegrenztem Wachsthum von x eine Grenze Y, so ist damit gemeint, dass Unterschiede der Form $Y - f(x)$, $Y - f(x_1)$ etc. die Grenze Null haben, wenn x, x_1 etc. irgendwelche schrankenlos wachsende Werthfolgen bedeuten. Dann ist Null aber auch die Grenze des Unterschiedes $f(x_1) - f(x)$ zweier solcher Unterschiede $Y - f(x)$, $Y - f(x_1)$. Die Umkehrung lautet:

I. Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, wo $x_1 > x$, bei schrankenlosem Wachsthum von x die Grenze Null hat, so giebt es eine Grösse Y der Art, dass auch $Y - f(x)$ bei solchem Wachsthum von x die Grenze Null hat.

Beweis. Da $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, durch hinreichend gross festzusetzende Werthe von x beliebig verkleinert werden kann, so bestimmen wir ein x' so, dass für $x' \leqq x < x_1$ der absolute Werth von $f(x_1) - f(x)$ eine beliebig klein angenommene Grösse ε' nicht überschreitet. Dann wird für jeden Werth $x \geqq x'$ $f(x)$ dem Grössenintervall $(f(x') - \varepsilon', f(x') + \varepsilon')$ angehören. Wir setzen $f(x') - \varepsilon' = \alpha'$, $f(x') + \varepsilon' = \beta'$. Weiter bestimmen wir $x'' > x'$ so, dass für $x'' \leqq x < x_1$ der absolute Werth von $f(x_1) - f(x)$ eine Grösse $\varepsilon'' < \varepsilon'$ nicht überschreitet. Dann wird $f(x)$ für $x \geqq x''$ allerdings auch dem Grössenintervall $(f(x'') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon'')$ angehören, allein

dies braucht nicht vollständig dem Intervall (α', β') anzugehören, sondern einer der Werthe $f(x'') - \varepsilon''$, $f(x'') + \varepsilon''$ kann ausserhalb (α', β') liegen. Wir bezeichnen mit (α'', β'') den Theil des Intervalls $(f(x'') - \varepsilon'', f(x'') + \varepsilon'')$, der dem Intervall (α', β') angehört. Nun bleibt $f(x)$ von $x = x''$ an im Intervall (α'', β''), welches $\leqq 2\varepsilon''$ ist. Auf dieselbe Weise können wir $f(x)$ fort und fort kleinere Intervalle zuweisen. Wir bestimmen $x''' > x''$ so, dass der absolute Werth von $f(x_1) - f(x)$ für $x''' \leqq x < x_1$ die Kleinheit $\varepsilon''' < \varepsilon''$ nicht überschreitet, und bezeichnen mit (α''', β''') den Theil des Intervalls $(f(x''') - \varepsilon''', f(x) + \varepsilon''')$, der dem Intervall (α'', β'') angehört. Es wird $f(x)$ von $x = x'''$ an im Intervall (α''', β''') $\leqq 2\varepsilon'''$ verlaufen, u. s. f. Die Werthfolgen:

$$\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$$
$$\beta', \beta'', \beta''', \ldots$$

die monoton sich ändern, haben je eine Grenze, und diese Grenzen sind gleich, wenn wir den $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ die Grenze Null vorschreiben. Y sei die gemeinsame Grenze der α und der β. Man wird nun stets einen hinreichend grossen Werth $\bar{x}$ von x angeben können, damit für $x \geqq \bar{x}$ der absolute Werth des Unterschiedes $Y - f(x)$ unter einer vorgeschriebenen Kleinheit $2\bar{\varepsilon}$ bleibe. Ist $\varepsilon^{(\nu)} \leqq \bar{\varepsilon} < \varepsilon^{(\nu+1)}$, so ist $\bar{x} = x^{(\nu)}$.

Wenn die Function $f(x)$ nicht etwa von einem Werthe ihres Arguments an constant ist, ein Fall den übrigens unser Beweis nicht ausschliesst, so nehmen die Abscissen x', x'', x''', ins Unbegrenzte zu. Q. E. D.

Man kann den Satz noch auf andere Art beweisen, namentlich kann man die Grenze Y auch sogleich numerisch construiren. Indessen wird der obige nicht eben lange Beweis den Leser befriedigen.

Ausser dem allgemeinen Satz giebt es einen anderen Satz, der zwar weniger umfassend wie Satz I, aber doch noch allgemein genug ist, und vielfach nützlich sich erweist. Es ist der von discreten Werthen auf Functionen übertragene Satz III des Art. 46:

II. Eine monotone Function $f(x)$, die zwischen endlichen Schranken verläuft, hat bei unbegrenzt zunehmendem Argument stets eine feste Grenze.

Zu einer Zeit, wo ich diesen Satz für ein Axiom hielt, welches den eigentlichen Grenzbegriff bilden sollte, gab ich mir viel Mühe, Satz I direct daraus zu folgern. Ich wollte mich eben davon überzeugen, dass Satz II das obere Princip sei. Indessen möchte vielmehr zwischen beiden Sätzen und dem Satz von der Grenze discreter monotoner Werthfolgen folgende Beziehung bestehen. Der letztere ist in Wirklichkeit das obere Princip, insofern er den Uebergang von den elementarsten Grenzen, die man erdenken kann, wie den von uns zu Grunde gelegten Decimalbruchgrenzen zu den allgemeinen Sätzen I und II vermittelt. Der allgemeinste alle besonderen Fälle einschliessende Ausspruch über das Vorhandensein von Grenzen ist aber ohne Zweifel Satz I.

Der Limes, welchen Satz II auf Grund seiner Voraussetzungen der Monotonie und Endlichkeit der Function $f(x)$ behauptet, lässt sich zwar, wie ich gleich zeigen werde, ohne Weiteres numerisch darstellen, aber ebenso leicht lassen die Voraussetzungen dieses Satzes in jene des Satzes I sich überführen. Man beweist Satz II am Bündigsten wohl so:

Die Voraussetzungen seien: $f(x)$ nimmt monoton zu, während x ins Unbegrenzte wächst, übersteigt nicht eine feste Schranke und bleibt nicht von irgend einem Werth von x an

unverändert. Dann giebt es jedenfalls ein grösstes Vielfache α_0 der Längeneinheit, welches $f(x)$ beim Wachsen überschreitet, da diese Function sonst über alle Grenzen wachsen müsste. Es kann die Function $f(x)$ das nächstgrössere Vielfache nicht erreichen, da sie es auch überschreiten müsste, indem vorausgesetzt ist, dass sie nicht constant bleibt. Nun theilen wir die Strecke von α_0 bis $\alpha_0 + 1$ in Zehntel der Längeneinheit, und es folgt genau auf dieselbe Weise, dass es ein grösstes Vielfaches α_1 von $\frac{1}{10}$ ($\alpha_1 < 10$) giebt, welches von $f(x) - \alpha_0$ überschritten wird, während $\alpha_1 + 1$ Zehntel nicht erreicht werden. Somit verläuft $f(x)$ von einem hinreichend grossen Werthe von x an zwischen α_0, α_1 und $\alpha_0, \overline{\alpha_1 + 1}$. Weiter von einem noch grösseren Werthe von x an verläuft $f(x)$ zwischen $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2$ und $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 + 1$, u. s. f. Es sei

$$Y = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots$$

Falls $f(x)$ für $x = x_p$ die Grösse $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ überschritten hat, so ist für $x < x_p$

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < f(x) < \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \overline{\alpha_p + 1}$$

oder

$$f(x) - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots < \frac{1}{10^p}$$

Es ist auch

$$Y - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p < \frac{1}{10^p}.$$

Zieht man also von $Y - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ die kleinere Grösse $f(x) - \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ ab, so ist a fortiori $Y - f(x) < \frac{1}{10^p}$, und kann durch hinlänglich gross angenommenes p, mithin überhaupt durch hinreichend gross gewählte untere Grenzen für x beliebig verkleinert werden. Also ist Y die Grenze von $f(x)$. Q. E. D.

Es ist noch aus dem monotonen irgend eine

endliche Grenze nicht überschreitenden Wachsthum von $f(x_1)$ die Bedingung des ersten Satzes zu folgern, dass $f(x) - f(x)$, $x_1 > x$, bei ins Unbegrenzte zunehmendem x die Grenze Null habe. In der That gäbe es keinen Werth x', der Art, dass für $x' \leqq x < x_1$ der Unterschied $f(x_1) - f(x)$ eine beliebig klein angenommene Grösse ε nicht mehr überschritte, so müsste es für jeden Werth x einen grösseren x_1 geben, für den $f(x_1) - f(x) > \varepsilon$ ist, und wenn eine unbegrenzte Reihe $x, x_1, x_2, \ldots$ solcher Werthe gebildet wird, so folgt aus $f(x_1) - f(x) > \varepsilon$, $f(x_2) - f(x_1) > \varepsilon$, etc., dass $f(x)$ gegen die Annahme über alle Grenzen wächst.

Ich knüpfe an diese Erörterungen des Convergenzprincips folgende Zusätze. Die Bedingung des ersten Satzes, $f_1(x) - f(x)$ solle unter jede Grenze sinken, lässt sich bisweilen vortheilhaft durch eine andere ersetzen, wie folgender Satz lehrt:

III. Wenn der Quotient $\frac{f(x_1)}{f(x)}$ bei unbegrenztem Wachsthum von x und x_1 Eins zum Limes hat, so besitzt $f(x)$ stets eine Grenze. Allein $f(x)$ kann auch, ohne dass diese Bedingung erfüllt ist, eine Grenze haben, wenn nämlich Null diese Grenze ist. Dann hat an Stelle des einfachen Quotienten $\frac{f(x_1) + \alpha}{f(x) + \alpha}$, wo α eine beliebige Grösse, den Limes Eins.

Wenn $\frac{f(x_1)}{f(x)}$ den Limes Eins hat, kann $f(x)$ nicht über alle Grenzen wachsen, denn für $x_1 > x$ würde dieser Quotient ja eine Folge beliebig grosser Werthe annehmen können.

Wenn aber $f(x)$ nicht über alle Grenzen wachsen kann, so folgt aus $\frac{f(x_1)}{f(x)} - 1 = \frac{f(x_1) - f(x)}{f(x)}$, dass mit $\frac{f(x_1)}{f(x)} - 1$ auch $f(x_1) - f(x)$ den Limes Null hat. Weiter aber ergiebt sich aus: $f(x_1) - f(x) = (f(x) + \alpha)\left(\frac{f(x_1) + \alpha}{f(x) + \alpha} - 1\right)$, dass mit $f(x_1) - f(x)$ die zweite Klammer rechts verschwindet.

Ein letzter Zusatz betrifft den Unterschied $f(x) - \varphi(x)$ zweier verschiedenen Functionen und lautet:

IV. Wenn der Unterschied zweier Functionen: $f(x_1) - \varphi(x)$ unter jede Grenze sinkt, falls x und x_1 über jede Grenze wachsen, so hat sowohl $f(x)$ als φ eine Grenze, und diese Grenzen sind einander gleich.

Zwischen x und x_1 ist im Satz keine Beziehung vorausgesetzt, sie können gleich oder ungleich sein, immer muss $f(x_1) - f(x)$ die Grenze Null haben. Dies vorausgeschickt schreiben wir:

$$f(x_1) - \varphi(x) = f(x_1) - f(x) + (f(x) - \varphi(x))$$

und $$f(x_1) - \varphi(x) = \varphi(x_1) - \varphi(x) + (f(x_1) - \varphi(x_1)).$$

Hieraus folgt, dass $f(x)$ und $\varphi(x)$ für sich eine Grenze haben, und aus $lim\,(f(x) - \varphi(x)) = 0$ ergiebt sich, dass diese Grenzen gleich sind.

Hiermit ist das allgemeine Convergenzprincip erledigt. Der Beweis des Divergenzprincips erheischt jetzt, dass wir den Endverlauf von Functionen betrachten, die keinen Limes haben. Es treten bei ihnen an die Stelle des einen Limes zwei Grenzwerthe, die ich Unbestimmtheitsgrenzen genannt habe, und von denen der folgende Artikel handelt.

68. Die Unbestimmtheitsgrenzen.

Die Function $f(x)$ kann offenbar, wenn x endlos wächst, nur 1. eine Grenze besitzen, oder 2. keine Grenze besitzen. Im zweiten Falle kann $f(x)$ entweder fort und fort Werthe annehmen, die an Grösse gleichviel ob in der positiven oder negativen Richtung oder in beiden alle Grenzen hinter sich lassen, oder die Function $f(x)$ wird innerhalb fester Grenzen verbleiben müssen, und, da sie keine Grenze haben soll, endlos auf und nieder schwanken.

Gehen wir näher auf den letzteren Fall ein. Man fühlt, dass, wie dieses Schwanken auch beschaffen sein mag, es, idealistisch gedacht, schliesslich zwischen festen Grenzen erfolgen muss. Genauen Aufschluss über solchen Endverlauf giebt der folgende Satz von den Unbestimmtheitsgrenzen, sein Beweis, und die daran sich knüpfende Erörterung.

V. Wenn eine Function $f(x)$ bei unbegrenzt zunehmendem Argument x innerhalb fester Schranken verläuft, so giebt es zwei feste Grössen U und O, zwischen denen $f(x)$ von hinreichend grossen Werthen von x an sich hin und her bewegt, indem sie entweder unaufhörlich ihnen beliebig nahe kommt, oder sie schliesslich um beliebig wenig überschreitet, oder endlich ihnen, ohne sie zu überschreiten, unbegrenzt oft gleich wird.

Diese Grössen U und O nennen wir die Unbestimmtheitsgrenzen der Function $f(x)$.

Zunächst muss es für jedes x eine kleinste Grösse $o(x)$ geben, die $f(x+\xi)$, wie gross ξ auch gedacht werden mag, nicht mehr übersteigt, weil vorausgesetzt ist, dass $f(x)$ nicht

ins Unbegrenzte wachsen könne (Art. 64, Satz I mit Zusatz). Die Grösse $o(x)$ nimmt bei wachsendem x nicht zu, weil sie die kleinste ist, die $f(x)$ nicht übersteigt. Dann muss aber, da auch sie nicht unter jede Grenze sinken darf, nach Satz II (Art. 67) eine bestimmte Grösse O vorhanden sein der Art, dass $O - o(x + \xi)$ durch hinreichend gross angesetztes x unter jede Grenze der Kleinheit gebracht werden kann. Die Grösse O nennen wir die obere Unbestimmtheitsgrenze. Das Vorhandensein der unteren Unbestimmtheitsgrenze U wird ganz ähnlich erwiesen. Q. E. D.

An diesen Nachweis für das Vorhandensein der Grenzen O und U knüpfe ich einige Frläuterungen und Beispiele.

1. Wie wir bei Gelegenheit der Unbestimmtheitsenveloppen eingehender prüfen werden, sind hinsichtlich der Function $o(x)$ zunächst zwei Fälle denkbar. Entweder nimmt die Function $f(x)$ von hinreichend grossem x an im Intervall (x, X) eine obere Grenze an, die bei unbegrenzt wachsendem X monoton zunimmt oder unverändert bleibt. In diesen Fällen ist $o(x)$ constant und gleich O. Dann ist O die obere Grenze von $f(x)$ im Intervall (x, ∞), wie gross x auch genommen werden möge. Oder die obere Grenze von $f(x)$ im Intervall (x, ∞) nimmt mit zunehmendem x ab. Dies ist der Fall, in dem $o(x)$ veränderlich ist, und monoton gegen 0 abnimmt.

Idealistisch ausgedrückt, schwankt im Unendlichen die Function $f(x)$ zwischen den Werthen O und U hin und her, denen sie unaufhörlich wiederkehrend gleich wird.

2. Man pflegt von einer Function, deren Unbestimmtheitsgrenzen O und U verschieden sind (denn sie können ja auch gleich sein), zu sagen, sie wird unbestimmt für $x = \infty$. Falls sie stetig ist, so bedeutet dies, dass sie jeden Werth

des Intervalls $(U + \varepsilon,\ O - \varepsilon_1)$ unbegrenzt oft annimmt, wo die Grössen ε und ε_1, die von vornherein Null sein können (z. B. ε_1 falls $o(x)$ constant $= O$ ist), um so kleiner sind, je grösser die Functionsargumente angenommen werden. Man kann dies analytisch so ausdrücken:

$$lim\, f(x) = \frac{O + U}{2} + j\,\frac{O - U}{2}$$

indem j jeden Werth des Grössenintervalls $(-1,\ +1)$ vorstellt. Das Zeichen j nimmt, so zu sagen, die Unbestimmtheit der Grenze in sich auf.

Wenn dagegen die Function $f(x)$ nicht stetig ist, so wird sie auch nicht jeden Zwischenwerth zwischen O und U anzunehmen brauchen, und dann wird j entweder nur $+1$ und -1, oder diese beiden Werthe und zugleich eine angemessene Anzahl Zwischenwerthe bedeuten.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, auf den Unterschied aufmerksam zu machen zwischen dem Zeichen j und dem gebräuchlichen Θ, mit welchem Cauchy einen unbekannten Werth zwischen 0 und 1 zu bezeichnen pflegt, u. A. wo es sich um Restbetrachtungen handelt, bei denen z. B. ein mittlerer Werth zwischen x und $x + h$ mit $x + \Theta h$, $0 \leqq \Theta \leqq 1$ bezeichnet wird. Diese mit dem Θ bezeichnete subjective Unkenntniss eines bestimmten einem bekannten Intervall angehörigen Werthes ist natürlich himmelweit verschieden von der objectiven durch j angegebenen Unbestimmtheit.

3. Um einige Beispiele von Unbestimmtheitsgrenzen zu geben, sei erstens $f(x) = cos\,\alpha x$. Es wird $f(x)$ zwischen -1 und $+1$ schwanken, diese Werthe unbegrenzt oft erhalten, aber nicht übersteigen. Setzt man weiter $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} cos\,\alpha x$

und $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cos \alpha x$, so werden die Grenzen der Unbestimmtheit dieser Functionen dieselben sein, nur wird die erstere die Werthe $-1, +1$ nie erreichen, die zweite wird sie stets übersteigen. Bei Functionen mit den Unbestimmtheitsgrenzen $-1, +1$ ist der Limes j. So hat man z. B.

$$lim\, e^{\frac{1}{x}} \cos x = \frac{1-1}{2} + j\frac{1+1}{2} = j.$$

Ich erwähne sodann Functionen, die nur sprungweise sich ändern. So können wir bestimmen, dass $f(x)$ für $n \leqq x < n+1$ (n eine ganze Zahl) einen constanten Werth $\varphi(n)$ hat, wo $\varphi(n)$ eine gegebene Function der ganzen Zahl n. Setzen wir z. B. $\varphi(n) = sin\, n\frac{\pi}{m}$, so wird $f(x)$ wieder die Unbestimmtheitsgrenzen $+1, -1$ haben, wenn m gerade ist. Ist dagegen m ungerade, so sind $\pm\left(1 - sin\frac{\pi}{2m}\right)$ die Unbestimmtheitsgrenzen. Indem man $\varphi(n) = u_1 + u_2 + .. u_n$, d. i. gleich der Summe n der ersten Glieder einer Reihe setzt, werden die Unbestimmtheitsgrenzen in die Reihentheorie eingeführt, wo sie ganz besondere Dienste leisten.

Geometrisch hat man die Unbestimmtheitsgrenzen als ein Paar gerade der x-Axe parallele Linien sich vorzustellen, die von ihr nur beziehlich U und O abstehen. Die Function $f(x)$, die, wenn vorstellbar, eine ins Unbegrenzte in der Richtung der positiven x sich erstreckende Linie ist, mag zunächst irgendwie verlaufen, schliesslich wird sie immer mehr in den Streifen zwischen den Geraden U und O eingeschlossen, wenn sie ihn nicht von vornherein innehielt.

69. Das allgemeine Divergenzprincip.

Nunmehr ist der Functionsendverlauf so weit zergliedert, dass wir das allgemeine Divergenzprincip beweisen können, welches lautet:

VI. Wenn der Unterschied $f(x_1) - f(x)$ nicht für alle Werthe x und x_1, die oberhalb einer hinlänglichen Grösse befindlich sind, unterhalb einer beliebig kleinen Grenze bleibt, so hat $f(x)$ keinen festen Limes.

Wir führen diesen Beweis durch Musterung der möglichen Fälle des Endverlaufs der Functionen: Falls $f(x)$ über alle Grenzen wächst oder abnimmt, kann $f(x_1) - f(x)$ stets beliebig gross angetroffen werden. Wenn weiter $f(x)$ zwischen endlichen Schranken verläuft, und die alsdann stets vorhandenen Unbestimmtheitsgrenzen O und U der Function $f(x)$ verschieden sind, so kann, da $f(x)$ beiden Grössen O und U schliesslich beliebig nahe kommt, der Unterschied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$, dem Unterschiede $O - U$ um so näher gebracht werden, je grösser x ist.

Endlich seien O und U einander gleich. Es bedeuteten $o(x)$ und $u(x)$ beziehlich die obere und untere Grenze der Function $f(x)$ im Intervall $(x_1\ \infty)$, so dass in diesem Falle $lim\ o(x) = lim\ u(x) = O = U$. Da aber stets $o(x) \geqq f(x) \geqq u(x)$ ist, so muss, falls $O = U$, der Unterschied $f(x) - f(x)$ die Grenze Null haben, wenn die Argumente x und x_1 schrankenlos zunehmen. Es sind also drei Fälle möglich. 1. Die Function $f(x)$ verläuft nicht zwischen festen endlichen Schranken. 2. Sie thut es, aber ihre Unbestimmtheitsgrenzen sind verschieden. 3. Sie sind einander gleich. Nur im dritten Falle ist nach

dem Obigen der Limes von $f(x_1) - f(x)$ Null, wie x und x_1 auch ins Unbegrenzte wachsen mögen. Wenn $f(x_1) - f(x)$ sich anders verhält, so tritt der dritte Fall nicht ein. Dann wird mithin $f(x)$ entweder endliche verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen O und U haben, oder überhaupt nicht zwischen endlichen Schranken verlaufen, und in diesen beiden Fällen heisst ein durch $f(x)$ bezeichneter unendlicher Process divergent.

Hiermit ist denn auch das allgemeine Divergenzprincip erledigt, und der allgemeine Satz über den Zusammenhang des Endverlaufs von $f(x)$ mit dem des Unterschiedes $f(x_1) - f(x)$ $(x_1 > x)$ in allen Theilen bewiesen.

Wir sind durch diesen Beweis zu allgemeinen Ueberlegungen über den Gang der Functionen im Unbegrenzten veranlasst worden, die wir noch nicht abbrechen mögen. Die Unbestimmtheitsgrenzen sind schon feste Puncte in der Mannigfaltigkeit des Functionenverlaufs. Wir brauchen aber nur noch ein wenig weiter in den Möglichkeiten, welche diese Mannigfaltigkeit umfasst, sichtend einzudringen, um auch feste Linien zu entdecken, welche jeden noch so schwankenden und zufälligen Vorgang ins Unbegrenzte geleiten. Manchen analytischen Convergenzuntersuchungen wird hierdurch das Eingehen auf die Schwankungen erspart, und der Vortheil gewährt, es nur mit monoton sich ändernden Functionen zu thun zu haben.

Die festen Linien, welche jedem unbegrenzten Vorgang eigenthümlich sind, nenne ich Unbestimmtheitsenveloppen und ihre Beschreibung und Theorie ist folgende.

70. Die Theorie der Unbestimmtheitsenveloppen.

Wir unterwerfen gegenwärtig den Functionsverlauf keiner

Beschränkung, $f(x)$ kann endlich bleiben, oder jede Schranke überschreiten. Drei Arten ihres Verlaufs erschöpfen alle Möglichkeiten.

1. Entweder erhält die Function $f(x)$, wenn x von einem hinreichend grossen Werth X an wächst, beständig wiederkehrend Werthe, die grösser sind, als alle früheren von X an. Idealistisch würde man sagen, dass, $x > X$ vorausgesetzt, $f(x)$ erst für $x = \infty$ seinen grösstmöglichen endlichen oder unendlichen Werth annimmt. Figur 2 veranschaulicht solchen Verlauf, falls z. B. $f(x)$ endliche Schranken nicht überschreitet. Dies ist die erste Art des Functionsverlaufs.

Fig. 2.

Oder $f(x)$ nimmt bei wachsendem x unaufhörlich Werthe an, die von keinem folgenden Functionswerth überschritten werden. Ein drittes giebt es nicht. Dies liefert die beiden anderen Arten des Functionsverlaufs:

2. Es nimmt $f(x)$ bei wachsendem x unaufhörlich Werthe an, die für kein grösseres x je wieder erreicht werden.

3. $f(x)$ erhält von einem Werth X von x an unaufhörlich einen gewissen Werth, der zwar für grössere Werthe des Arguments immer wieder erreicht, aber nicht überschritten wird.

Die Figuren 3 und 4 sollen eine Vorstellung vom Functionsverlauf 2 und 3 geben.

Fig. 3.

Fig. 4.

Diese Unterscheidungen gestatten den unbegrenzten Verlauf der Functionen überhaupt einzuschliessen zwischen solchen Functionen, bei denen kein Wechsel zwischen Ab- und Zunehmen stattfindet.

1. Im ersten Fall lassen wir von einem hinreichend grossen Werth X von x an diese Veränderliche wachsen, und beschreiben eine monoton zunehmende Function $O(x)$ wie folgt.

Es sei zunächst X_1 der erste Werth von $x > X$, für welchen $f(x)$ nicht kleiner ist als für irgend einen früheren Werth von $x (X \leqq x < X_1)$. Im Intervall $X \ldots X_1$ sei alsdann $O(x)$ gleich $f(x)$. Von da ab wird $O(x)$ so beschrieben:

Es sei $O(x) = f(x)$ für alle Werthe x (von X_1 an), in denen $f(x)$ grösser ist als irgend einer der vorhergehenden Werthe von x. Für die übrigen Werthe x ist $O(x)$ stets gleich dem letzten Werthe $O(x)$, der gleich $f(x)$ war.

2. Wenn $f(x)$ bei wachsendem x unaufhörlich wiederkehrend Werthe annimmt, die für keinen grösseren Werth x wieder erreicht werden, so sei X der erste dieser Werthe. In diesem Falle bestimmen wir eine nirgend zunehmende Function $O(x)$ so, dass $O(x) = f(x)$ für alle Werthe, in denen $f(x)$ grösser ist, als für alle folgenden Werthe von x. Für die übrigen Werthe von $x > X$ sei $O(x)$ gleich dem ersten darauf folgenden Werthe von x für den $O(x) = f(x)$.

3. Wenn $f(x)$ von einem Werthe X von x an unaufhörlich einen Werth annimmt, der zwar stets wieder erreicht, aber nie überstiegen wird, sei $O(x)$ gleich diesem Werthe.

Die drei Fälle werden durch folgende Figuren verbildlicht, in denen die stärker ausgezogene Linie $O(x)$ vorstellt:

1.

2.

3.

Bei der im Vorstehenden beschriebenen Construction der

Unbestimmtheitsenveloppen hatte ich den Zweck, möglich kurz und allgemein das Vorhandensein solcher jede unbegrenzte Operation ins Endlose einschliessender Linien ausser Zweifel zu setzen. Ersichtlich giebt es aber solcher monoton sich ändernder Functionen, welche zum Endverlauf von $f(x)$ genau in denselben Beziehungen stehen, unzählige. Das Gewicht soll nun gerade auf diese Beziehungen gelegt werden, und die Gestalt der Unbestimmtheitsenveloppe, falls sie nur dasselbe leistet, wie die oben beschriebenen, ist unwesentlich. Somit setzen wir den Begriff der Unbestimmtheitsenveloppen durch folgenden Satz fest:

VII. Es sei irgend eine Function $f(x)$ eines Arguments x gegeben, welches wir ins Unbegrenzte wachsend uns denken. Alsdann giebt es stets zwei Functionen $O(x)$ und $U(x)$, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. Jede dieser Functionen ändert sich monoton, kann aber auch constant sein.
2. Es wird bei schrankenlos wachsendem x sowohl $O(x) - f(x)$ als auch $f(x) - U(x)$ unbegrenzt oft Null.
3. Es ist stets $O(x) \geqq f(x) \geqq U(x)$, aber nur im Falle $f(x)$ selbst monoton sich ändert, ist $O(x) = f(x) = U(x)$.
4. Falls die Functionen $O(x)$ und $U(x)$ Grenzen haben, sind dies die Unbestimmtheitsgrenzen O und U von $f(x)$.

Jede Function, welche die vorstehenden vier Eigenschaften der Functionen $O(x)$, $U(x)$ hat, soll Unbestimmtheitsenveloppe heissen. Die Function $f(x)$ wird zwischen ihnen gleich-

sam hin und her geworfen. Unter Enveloppen im Monge'schen Sinne werden freilich anders gedachte Gebilde verstanden, indessen mag mir diese Namengebung zu Gunsten des einhüllenden Charakters der Functionen $O(x)$, $U(x)$, nachgesehen werden.

Dieser mein Begriff der Unbestimmtheitsenveloppen ist schon nützlich, wenn es sich darum handelt, den Verlauf der Functionen kurz zu beschreiben. In der That, es können

1. beide Enveloppen in positiver oder beide in negativer oder die eine in positiver, die andere in negativer Richtung alle Schranken überschreiten.
2. Es kann eine von ihnen alle positiven oder negativen Schranken überschreiten, und die andere eine Grenze haben.
4. Sie können beide eine Grenze haben.
5. Sie können untereinander und mit der Function $f(x)$ identisch sein, falls diese nämlich selbst monoton sich ändert.

Dies sind allgmeinere Unterscheidungen. Weiter kann man sodann fragen, ob sie ihren Grenzen wachsend, abnehmend, oder constant bleibend sich nähern.

Es können nach diesen Principien im Ganzen 24 charakteristische Arten des Functionenverlaufs abgezählt werden, wenn man den Fall, dass $O(x)$ und $U(x)$ dieselbe Grenze haben, besonders in Rechnung zieht, und den Fall der monotonen Aenderung von $f(x)$ einfach rechnet.

Bedeutet w, a, c: zwischen endlichen Grenzen wachsend, abnehmend, constant; ferner $+\infty, -\infty$: alle positiven, alle negativen Schranken hinter sich lassend, so sind dies die Fälle:

	$O(x)$	$U(x)$	
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$-\infty$	$-\infty$	1
	$+\infty$	$-\infty$	1
	$+\infty$	$w\,a\,c$	3
	$w\,a\,c$	$-\infty$	3
$O > U$	$w\,a\,c$	$w\,a\,c$	9
$O = U$	$w\,a\,c$	$w\,a\,c$	5
	$O(x) =$	$U(x) = f(x)$	1
			24

Für die Anwendung wird vor der Hand die obige Unterscheidung in 5 Fälle genügen, und diese 24 Fälle sollen hauptsächlich zur Ausführung des Bildes dienen.

Ich gebe zum Schluss dieses Artikels noch einige Beispiele von Unbestimmtheitsenveloppen.

Betrachten wir die Functionen $e^{\frac{1}{x}}\cos x$, $e^{-\frac{1}{x}}\cos x$, $\cos x$. Bei der ersten kann man setzen $O(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $U(x) = -e^{\frac{1}{x}}$, bei der zweiten $O(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $U = -e^{-\frac{1}{x}}$, bei der dritten $O(x) = O = 1$, $U(x) = U = 1$. Für $e^{\pm\frac{1}{x}}\cos x$ hat man:

$$O(x) - f(x) = e^{\pm\frac{1}{x}}(1 - \cos x)$$

eine Grösse die unbegrenzt oft verschwindet, aber nicht negativ wird, so dass die Criterien des Satzes VII erfüllt sind.

Die Unbestimmtheitsenveloppen von $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}\cos x$, sind $\pm\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$, und die Unbestimmtheitsgrenzen sind $O = U = 0$.

69. Ueber den monotonen Endverlauf der Functionen und die infinitäre Pantachie.

Von grossem Belang ist das im vorigen Artikel nur kurz berührte Verhalten, bei dem die Function $f(x)$ selbst monoton sich ändert, so dass $O(x) = U(x) = f(x)$. Denn an diese Monotonie reiht sich alles, was auf die relative Zu- und Abnahme der Functionen Bezug hat.

Eine monotone Function kann alle positiven und negativen Schranken überschreiten, oder sie kann eine endliche Grenze haben. Im ersten Falle wird es genügen, den zunehmenden Functionsverlauf zu untersuchen. Im zweiten wird man Null als Grenze annehmen dürfen, da eine andere Grenze doch nur von der Function abgezogen zu werden braucht, um die Grenze Null zu ergeben. Weil aber die monotonen Functionen, welche die Grenze Null haben, als solchen, die ins Unbegrenzte wachsen, reciprok angesehen werden können, so dürfen wir uns hier überhaupt auf die Betrachtung letzterer beschränken.

Es handelt sich also um Functionen, die, idealistisch ausgedrückt, nur wachsend unendlich werden. Die Theorie der relativen Geschwindigkeit dieses Wachsthums ist der Gegenstand des Infinitärcalcüls, den wir an späteren Stellen eingehend entwickeln werden. Nur soviel von den Elementen jener Theorie will ich hier zur Sprache bringen, als für die Grundbegriffe der allgemeinen Functionentheorie, deren Erörterung ich mit diesem Artikel abschliesse, erforderlich scheint.

Wir stellen uns eine Reihe monoton ins Unbegrenzte wachsender Functionen vor, und betrachten irgend zwei Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ dieser Reihe. Man wird sagen, dass $f(x)$ rascher ansteigt als $\varphi(x)$, wenn von einem hinreichend grossen Werth X von x an $f(x) > \varphi(x)$ ist, und der Unter-

schied $f(x) - \varphi(x)$ mit x zunimmt. Die Anwendungen verleihen dieser verschieden raschen Zunahme der Functionen ein besonderes Interesse, wenn die rascher wachsende Function $f(x)$ so viel rascher wächst als die andere $\varphi(x)$, dass der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ebenfalls schrankenlos wächst.

Der eigenthümlichen Natur gerade dieses Gegenstandes ist übrigens die empiristische Ausdrucksweise so wenig angemessen, sie würde schliesslich so schleppend werden, dass wir wenigstens hier die Anwendung idealistischer Terminologie uns nicht versagen wollen. Wir wissen nunmehr ja doch genau, was wir uns dabei zu denken haben, und ist es nicht gerade ein willkommener Erfolg unserer Untersuchung über die Principien, dass sie, wie jede gründliche Aufklärung, nicht allein dem Gedanken, sondern auch dem Wort freiere Bewegung gestattet?

Je nachdem der Quotient $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ den Limes ∞ oder 0 hat, werden wir sagen: $f(x)$ hat ein gröseres oder kleineres Unendlich als $\varphi(x)$, und wenn dieser Quotient einen von 0 und ∞ verschiedenen Limes hat, so haben $f(x)$ und $\varphi($ ein gleiches Unendlich. Es hat sich als nützlich herausgestellt, hierfür Zeichen einzuführen.

Es bedeutet:

$$f(x) \succ \varphi(x),\ f(x) \prec \varphi(x),\ f(x) \sim \varphi(x)$$

genau dasselbe wie:

$$lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty,\ lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0,\ 0 < lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \infty$$

oder $f(x)$ hat ein grösseres, ein kleineres, das gleiche Unendlich wie $\varphi(x)$. Die Relationen $f(x) \begin{matrix} \succ \\ \sim \\ \prec \end{matrix} \varphi(x)$ nenne ich in-

finitäre Gleich- oder Ungleichheiten, und sie lassen mannigfache Operationen zu, die eine eigene Rechnungsart, eben den Infinitärcalcül bilden. Ich erwähne hier nur das Nächstliegende, dass man aus den infinitären Relationen:

$$f(x) \succ f_1(x),\ \varphi(x) \succ \varphi_1(x),\ \lambda(x) \sim \lambda_1(x)$$

sogleich diese schliesst:

$$f(x)\,\varphi(x) \succ f_1(x)\,\varphi_1(x),\ f(x)\,\lambda(x)^{\pm 1} \succ f_1(x)\,\lambda_1(x)^{\pm 1}$$

und je nachdem $f(x) \succ \lambda(x)$ oder $\asymp \lambda(x)$:

$$f(x) \pm \lambda(x) \gtrsim f_1(x) \pm \lambda_1(x).$$

Auch nur vorübergehend erwähne ich, dass dieselben Benennungen und Formeln für unbegrenzt gegen die Null abnehmende Functionen gelten, nur wird man dort die Relationen $lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$ oder $f(x) \prec \varphi(x)$ in Worten durch: $f(x)$ hat eine kleinere Null wie $\varphi(x)$ wiedergeben.

Die Grösse der Unendlich liefert offenbar ein Anordnungsprincip für monoton ansteigende Function. Man kann sie so in eine Reihe:

$$f_0(x) \ldots f_1(x) \ldots f_2(x) \ldots$$

anordnen, dass jede folgende ein grösseres Unendlich wie alle früheren hat, und es wird hier jede neu hinzukommende einen ganz bestimmten Platz finden, wobei, falls das Unendlich der neuhinzukommenden Function in der Reihe schon vertreten ist, es als das schon vorhandene deckend angesehen wird, wie in der lineären Grössenfolge 1 und 0,99 ...

Eine derartige Reihe ist, wenn

$$lognat = lx,\ llx = l_2x,\ lllx = l_3x, \text{ etc.}$$

gesetzt wird:

$$\ldots (l_3x)^{\mu} \ldots (l_2x)^{\mu} \ldots (lx)^{\mu} \ldots x^{\mu} \ldots e^{\mu x^{\varkappa}} \ldots e^{\mu e^{\mu_1 x^{\varkappa}}} \ldots \text{J.}$$

Jeder Quotient einer dieser Functionen durch eine der vorhergehenden hat den Limes ∞.

Bei diesen und zusammengesetzteren Functionen, welche gleichfalls dem aus dem Potenzbegriff hervorgegangenen analytischen Operationsgebiet angehören, ermittelt man den Quotientenlimes durch Zurückführung auf einen der Quotienten $\frac{x}{lx}$ oder $\frac{e^x}{x}$, die durch Substitution sogleich auf einander zurückführbar sind. Wenn man dem Begriff der Exponentialgrösse e^x die Reihe $\Sigma \frac{x^n}{n!}$ zu Grunde legt, so ist $\frac{e^x}{x}$ der fundamentale Quotient, und sein Limes, oder der des allgemeinen Quotienten $\frac{e^{\mu x^\varkappa}}{x^M}$ ist leicht zu bestimmen. In Reihenform lautet dieser Quotient:

$$\Sigma \frac{\mu^n x^{\varkappa n - M}}{n!}.$$

Da nun $\varkappa n - M$, wie gross M und wie klein $\varkappa$ auch sein mag, mit wachsendem n einmal positiv wird, so ist der fragliche Limes ∞. Beispielsweise sei der Quotient

$$e^{\mu e^{\mu_1 x^\varkappa}} . e^{-mx^k}$$

zu reduciren. Sein Logarithmus ist:

$$mx^k \left\{ \frac{\mu}{m} \frac{e^{\mu x^\varkappa}}{x^k} - 1 \right\},$$

und wird nach dem Obigen mit x unendlich.

In der obigen Reihe J bedeuten die Parameter $\mu, \mu_1, \ldots, \varkappa$ irgend welche positive Zahlen. Jede der darin verzeichneten Functionen bedeutet daher eine unendliche Schaar oder eine vollständige Pantachie von einzelnen Functionen. Allein die

Reihe J lässt sich noch auf sehr mannigfaltige Weise mit Functionen bereichern. Ein solches Verfahren ist folgendes: Es gelte für zwei Functionen u_1 und u_2 die infinitäre Ungleichheit $u_1 \prec u_2$, und man setze $u_2 = u_1 v$, so hat man:

$$u_1 \prec u_1 v^{\mu} (lv)^{m_1} (l_2 v)^{m_2} \dots (l_n v)^{m_n} \prec u_2,$$

wo $u \prec 1$, und die m irgendwelche positive Zahlen vorstellen. Es ist leicht diese Formeln successive zu bestätigen. Auf diese Weise kann man zwischen irgend zwei Functionen mannigfache Schaaren anderer Functionen einschalten.

Ein anderes Verfahren die Reihe J zu verdichten, ist, dass man an Stelle der Parameter Functionen setzt. So ist für $0 < \mu < 1$; m und $M > 0$:

$$(lx)^M \prec (lx)^{(lx)^{\mu}} \prec x^m.$$

Wenn man etwas über diese analytischen Ausdrücke nachdenkt, so erkennt man, dass mit Hülfe jener beiden Verdichtungsmethoden die Reihe J eine Vielheit vorstellt, die alle früheren weit überragen möchte.

Alles wohl erwogen, vermuthe ich in der That, dass die vollständige Pantachie der lineären Grössen an Mächtigkeit (im G. Cantor'schen Sinne) der Vielheit der Unendlich nicht gleichkommt. Die infinitäre Pantachie, wie diese Succession genannt werde, ist ein völlig bestimmter Inbegriff. Alle Functionen, welche in die infinitäre Gleichheit $f(x) \sim f_1(x)$ für $f_1(x)$ eingesetzt, ihr genügen, bilden mit $f(x)$ zusammen eine infinitäre Grösse, einen infinitären Punct, und diese Puncte, so viel ihrer nur immer gedacht werden können, fügen sich einer völlig bestimmten Reihenfolge ein. Allerdings wird durch solche Bestimmung den infinitären Punkten nicht ohne Weiteres ein geometrisch vorstellbarer Ort angewiesen,

wie den Grössen der vollständigen Pantachie. Indessen liegt dies daran, dass die vollständige Grössenpantachie unmittelbar der Grössenvorstellung entspringt, und der vollständigen infinitären Pantachie minder einfache Vorstellungen zu Grunde liegen. Aber für das eigentliche Wesen der vollständigen Grössenpantachie ist der Ort, den ihre Individuen einnehmen, ja nebensächlich, da er durch functionale Zuordnung mannigfach geändert werden kann. Mit der vollständigen Pantachie behält die infinitäre gemein dies Wesentliche, dass beider Puncte nur einer Reihenfolge fähig sind.

Wir können die infinitäre Pantachie empiristisch und idealistisch auffassen. Empiristisch ist sie so zu verstehen, wie wir sie eben beschrieben haben, als beliebig zu verdichtende Menge von Individuen. Idealistisch ist sie ein infinitäres Continuum, ähnlich dem Zahlencontinuum, welches man ebenfalls, wenn auch minder einfach, als Punctvielheit auf einer Linie auffassen kann. Man hat die Bedingung aufzustellen, dass für irgend zwei Individuen $f(x)$ und $f_1(x)$ der ansteigenden Curvenschaar der Unterschied $f(x) - f_1(x)$ bei wachsendem x sein Zeichen nicht ändert. Dann sei eine auf der Abscissenaxe senkrechte Gerade gedacht, deren Schnittpunkte mit den ansteigenden Puncten wir ins Auge fassen. Theils wegen der vorstehenden Bedingung, theils damit die sämmtlichen höheren Logarithmen aus der Abscissenaxe emporgestiegen seien, werden wir jene Gerade in unendliche Ferne rücken lassen müssen.

Die Puncte der unendlich fernen Geraden sind alsdann das idealistisch-geometrische Aequivalent der infinitären Pantachie.

Es möchte nicht leicht sein, die infinitäre Pantachie mit der vollständigen Pantachie im Sinne Herrn G. Cantor's in

Bezug auf deren relative Mächtigkeit zu vergleichen. Auf alle Fälle sind beide Vielheiten offenbar etwas ganz Verschiedenes. Die Zuordnung von Element zu Element, welche bei abzählbaren Vielheiten ihren guten Sinn hatte, ist hier undenkbar. Schon dem äusseren Anschein nach ist die infinitäre Pantachie, idealistisch wie empiristisch, viel mannigfaltiger zusammengesetzt, als die vollständige. Functionen mit unbegrenzt vielen Parametern, deren jeder eine vollständige Pantachie bedeutet, lassen sich zwischen je zwei Individuen der Pantachie einschalten, und sodann wiederum zwischen je zwei Individuen der eingeschalteten Functionen, u. s. f.

Doch mehr als solche Erwägungen bestimmen mich beide Pantachien für verschiedenartig zu halten die Ergebnisse, zu denen ich in meinen »Paradoxen des Infinitärcalcüls« gelangt bin. Dort ist ein wesentlicher Unterschied aufgedeckt zwischen der Annäherung an ein besonderes Unendlich der infinitären Pantachie, und einem besonderen Werth der vollständigen Pantachie. Wir können den Satz so ausdrücken: Jedem besonderen Werth x einer vollständigen Pantachie nähern sich beliebig viele abzählbare Werthfolgen der Art, dass die Unterschiede zwischen x und den x sich nähernden Werthen der verschiedenen Werthfolgen unter jede Grenze sinken. Ist dagegen ein Unendlich $f(x)$ gegeben, so giebt es keine Folge von Functionen $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$, für die z. B. $\psi_1(x) \prec \psi_2(x) \prec \ldots \prec f(x)$ ist, der Art, dass nicht andere Folgen $\varphi_1(x)$, $\prec \varphi_2(x) \prec \ldots \prec f(x)$ angebbar wären, deren sämmtliche Individuen grössere Unendlich wie die sämmtlichen $\psi(x)$ haben.

Dies ist eine Verschiedenartigkeit, welche keine Zuordnung nung der infinitären Folge zur Grössenfolge zu gestatten scheint.

Schlussbetrachtungen zur vorstehenden Metaphysik der analytischen Grundbegriffe.

Seite 13 deutete ich an, dass in der Analysis dem Grenzbegriff, genauer der Frage nach der Existenz der Grenze eine ähnliche Rolle zufällt, wie in der Geometrie dem Euklidischen Hauptaxiom, und es ist lehrreich, bei diesem Vergleich etwas zu verweilen.

In der Geometrie, d. i. der Lehre von den Beziehungen zwischen Punctlagen, Linien, Flächen, Körpern führt die Begründung der Sätze und Theorien schliesslich zurück auf gewisse anschauliche Grundsätze, die man die Axiome der Geometrie nennt. Diese Axiome sind zwar Anschauungswahrheiten, d. i. an ihrer Richtigkeit zweifelt der Unbefangene zunächst nicht. Allein sie besitzen keineswegs die einleuchtende Gewissheit unmittelbarer Wahrnehmungen, und wenn man genauer zusieht, so ist es sogar nicht möglich oder doch schwer, sie mit solchen durch eine befriedigende Folge von Vorstellungen in lückenlosen Zusammenhang zu bringen, mit einem Worte sie zu beweisen. Sie sind übrigens verschiedener Natur. Z. B. das Axiom, dass die Gerade der kürzeste Weg zwischen zwei Puncten sei, und dass es nur einen kürzesten Weg giebt, ist kein eigentliches geometrisches Axiom. Die Untersuchung zeigt, dass der ihm zu Grunde liegende Begriff der Rectificirbarkeit ein analytischer ist, weil ein Grenzübergang darin steckt. Falls man in der Existenz

der Grenze ein Axiom sehen will, so bleibt es auch der Satz von der kürzesten Verbindungslinie zweier Puncte. Andernfalls lässt er sich beweisen. Das eigentliche Axiom der reinen Geometrie ist das Parallelenaxiom, gleichwerthig mit dem Satz, dass die Winkelsumme des Dreiecks zwei Rechte beträgt, eine Grundwahrheit, bei welcher der Weg zwischen der Gewissheit unmittelbarer Wahrnehmungen und der Gewissheit der allgemeinen Behauptung lang und schwer zu finden war.

Die Geschicke jenes Euklidischen Axioms sind bekannt. Die Erkenntniss, dass es keine conditio sine qua non für eine systematische Geometrie überhaupt ist, machte daraus einen Erfahrungssatz, dessen tiefere Bedeutung Riemann durch seine Zergliederung des Raumbegriffs enthüllte. Er ging dabei wiederum von einem Axiom aus, welches sodann Hr. Helmholtz auf unsere Vorstellung von der relativen Bewegung zurückführte. Wie viel Nützliches und Ueberraschendes Analysis und Geometrie aus dem neu erschlossenen Quell noch schöpfen mögen, es scheint, dass er schon jetzt bis an seinen Ursprung in der Wahrnehmungswelt offengelegt ist, dass durch die erwähnten Untersuchungen der Raumbegriff empiristisch im Wesentlichen aufgelöst und dass somit das Hauptaxiom der Geometrie empiristisch erklärt ist. Jedenfalls wollen wir jetzt diese Annahme machen.

Mithin ist über die Grundprincipien der Geometrie Folgendes auszusagen. Euklid traf mit seinem Axiom den Nagel auf den Kopf. Es war als unbewiesener Grundsatz hingestellt, wurde neuerdings als Erfahrungssatz erkannt und schliesslich mit dem Raumbegriff in unvermutheten Zusammenhang gebracht. Das Problem war also uralt, seine Lösung jedoch äusserst schwierig. Diese Untersuchungen bilden gleichsam eine Episode in der Geometrie, die, wenn gleich an

sich von höchstem Belang, auf diese Wissenschaft selbst keinen anderen Einfluss übt, als dass sie ihr, wie auch der Analysis neue Forschungsgegenstände jedoch innerhalb des alten Grössenbegriffs liefert.

In der Analysis verhalten die Dinge sich anders. Diese Wissenschaft entstand erst in neuerer Zeit und ihre Erfinder richteten ihre Anstrengungen sogleich auf die höchsten Probleme. Einem ungestümen Eroberer vergleichbar, trug hier die Forschung ihr sieghaftes Banner in die Ferne, ohne viel um die Sicherung des Erworbenen sich zu kümmern. Allein der namentlich der zweiten Hälfte dieses Jahrhunderts eigenthümliche Trieb nach tieferer Einsicht in die Grundlagen unseres Wissens macht auch bei den Analysten sich geltend. Nachdem sie durch Gauss, welcher zuerst das Streben nach wirklich strenger Begründung mathematischer Wahrheiten angeregt haben dürfte, sodann durch die Arbeiten von Cauchy, Abel und Dirichlet den unsagbaren Genuss kennen gelernt, den genaue Mathematik gewährt, wurde sie gebieterisches Bedürfniss, und nun kam die Trüglichkeit mancher bis vor Kurzem unangefochtener Schlüsse ans Licht, Operationsergebnisse wurden gefunden, welche den verbreitetsten Ansichten widersprachen, auch der Metaphysik der Grundbegriffe wendete das Interesse sich zu. So lesen sich denn die heutigen Arbeiten ganz anders, wie die des vorigen und der ersten Decennien des jetzigen Jahrhunderts. Auch bin ich überzeugt, dass die heutige Analysis, so weit sie nur durch Zahlen vertretene bestimmte oder unbestimmt gelassene Grössen combinirt, wie dies von der Algebra, der speciellen Functionentheorie, den bestimmten Integralen etc. gilt, kurzum so weit der Dualismus des Grössenbegriffs nicht ins Gewicht fällt, die Mathematiker kommender Jahrhunderte nicht minder zufrieden-

stellen wird, wie uns. Ein Gleiches konnte bisher, wie mehrfach betont, anderen Theorien, z. B. der Differentialrechnung, und mannigfachen Gegenständen der allgemeinen Functionentheorie nicht nachgerühmt werden, und diese Gebiete sind es, die ich der Geometrie gegenüberstelle. Hier war das dem Euklidischen entsprechende Axiom, dessen Ergründung das vielgestaltige Räthsel löst, bisher nicht erkannt.

Wohlan, mein Idealist und mein Empirist sind darin einig, dass der Inhalt des Grenzbegriffs dieses bisher fehlende Anordnungsprincip der analytischen Grundbegriffe liefert. So wenig aber ist ihm bisher eine solche Bedeutung beigelegt worden, dass der Idealist sicherlich nichts Ueberflüssiges that, als er zeigte, das Vorhandensein der Grenze müsse überhaupt erst bewiesen werden.

Der Grenzbegriff steht also in der That in ähnlicher Beziehung zu jenem die Nebel verscheuchenden Dualismus wie das Parallelenaxiom zum Raumbegriff. Der Unterschied ist aber, dass die Schwierigkeit in den Grundlagen der Analysis darin bestand, das Kernaxiom zu finden, mit dessen Lösung dann alles Uebrige bis auf die Durchführung im Einzelnen gegeben war. Während man in der Geometrie das Kernaxiom längst kannte, hier aber die Zergliederung des das Axiom erklärenden Raumbegriffs die grosse Schwierigkeit bildete. Und wiederum im Gegensatz zum geometrischen Axiom bleibt der durch den Grenzbegriff an den Tag gebrachte Dualismus für die Grundlagen der Analysis weit hinein maassgebend. Sein Einfluss macht sich geltend durch alle Theile des Convergenz- und Divergenzprincips, sodann überall hin, wo anorthoide Abhängigkeiten zu berücksichtigen sind. Dagegen können die elementaren Vorstellungsgruppen des Raumbegriffes allerdings auch idealistisch und empiristisch

gedacht werden, indessen ist dieser Dualismus in der Geometrie, so viel wenigstens bis jetzt sich übersehen lässt, gänzlich ohne Wirkung.

Unsere Untersuchung der analytischen Grundbegriffe beantwortet aber nicht alle Fragen, welche das Phänomen der Analysis mit ihrem wunderbaren durch an sich sinnlose Symbole vermittelten Zusammenhang anregt.

Zunächst ist es die Ausdehnung der einfachen Operationen auf eine beliebige Anzahl Elemente, und die Häufung der Operationen, welche zu denken giebt. In der That, wenn es gelang zu zeigen, dass gerade der Grössenbegriff Regeln, wie die Bruchmultiplication, die rein arithmetisch schwer zu motiviren sind, ganz natürlich erklärt (pag. 51), so hört er scheinbar auf solche Dienste zu leisten, wo z. B. mehr als drei Elemente mit einander multiplicirt werden sollen. Man könnte daher die Gleichung $x = a_1 . a_2 \ldots a_n$ als nur arithmetisch deutbar ansehen, und so überhaupt die rein arithmetische Auffassung der Analysis als Nothwendigkeit folgern. Dies wäre aber ein Irrthum. Es ist klar, dass mathematische Operationen mit noch so viel Elementen und von noch so hoher Ordnung stets eine Succession von elementaren Operationen sind, und nur als solche einen Sinn haben. So ist das Product $a_1 . a_2 \ldots a_n$ zwar nach seinen Factoren symmetrisch, sein Sinn ist aber

$$(\cdots((a_{r_1} \cdot a_{r_2}) a_{r_3}) \cdots a_{r_n}),$$

und es ist eben ein Satz, dass die Folge $r_1, r_2 .. r_n$ eine beliebige Verstellung der Folge $1, 2, .. n$ sein kann. Die successiven elementaren Operationen erlauben bei jeder einzelnen die Zugrundelegung die Grössenbegriffs, und dies gilt von allen mathematischen Operationen ohne Ausnahme.

Wie ich (pag. 50) ausführte, wird man sich während des Calcüls nicht stets gegenwärtig halten, dass die Buchstaben Zahlen, die Zahlen Grössen bedeuten, sondern man wird mit den Buchstaben selbst nach den bekannten in letzter Instanz dem Grössenbegriff entsprungenen Regeln zweckentsprechende Combinationen vornehmen. So kann man dann überhaupt die Grössenvorstellung bei Seite lassen, falls man ihrer nicht unmittelbar bedarf, und in Zahlen und Buchstaben denken. Ja man wird sogar verlangen dürfen, dass Schlüsse und Beweise arithmetische Genauigkeit besitzen, und nicht durch die geometrische Phantasie auszufüllende Lücken aufweisen*), weil solche arithmetische Genauigkeit für die Vollständigkeit des Schlussnetzes die zuverlässigste Bürgschaft leistet.

Damit ist aber kein grundsätzlicher Unterschied in der Auffassung analytischer Operationen gesetzt, es handelt sich vielmehr nur um eine abgekürzte Ausdrucksweise und möglich sichergestellte Schlussform.

Die vorstehenden Ausführungen werden dem Analysten, dem mechanische oder physikalische Betrachtungen vertraut sind, fast überflüssig erscheinen. Die Gleichungen der Mechanik enthalten neben Buchstaben, die Zahlen vorstellen, solche die Grössen ganz bestimmter Art durch alle Operationen hindurch bedeuten, so dass hier der Forderung rein numerischer Auffassung der Operationsgrössen keine Folge geleistet werden könnte. Während man z. B. mit den 9 Coordinaten des Dreikörperproblems rechnet, denkt man zwar nicht fortwährend an ihre mechanische Bedeutung. Sie bleibt ihnen aber unausgesetzt erhalten, wie dies aus dem Princip von der

*) Wie ich es einst ausdrückte.

Homogeneïtät der mechanischen Grössen folgt (Poisson, Traité de Mécanique, Introduction, Nro. 23).

Noch eine andere Bemerkung knüpft sich an das Gesammtbild der Analysis. Ueberblicken wir ihre historische Entwickelung, so erscheint sie als ein durch die Denkarbeit von Jahrtausenden geschaffener Organismus, der zwar niemals abgeschlossen ist, doch stets organisch sich weiter entwickelt, so nämlich, dass in jedem Entwickelungsstadium das Vorhandene durchweg tadelfreien logischen Zusammenhang besitzt. Während die Forschung vordringt, werden einst eifrig verfolgte Richtungen verlassen, und neue Wege eingeschlagen. Aber bei diesem fortwährenden Wechsel bildet die Analysis jeder Epoche ein System von Sätzen und Methoden, in welchem Alles sich gegenseitig stützt und fördert, nirgends ein Widerspruch stattfindet. Hierbei zeigen sich auffallende Erscheinungen. Z. B. hat sich einerseits aus dem Begriff des Product's durch Descartes's sinnreichen Algorithmus das Operationsgebiet der Potenz entwickelt. Andererseits entstand und wurde ausgebildet das Operationsgebiet der trigonometrischen Functionen. Was konnten beide Gebiete begrifflich gemein haben? Und doch stellte das imaginäre Symbol zwischen ihnen eine Verbindung her, durch welche sie schliesslich zu dem Operationsgebiet der complexen Functionentheorie vereinigt wurden. Wie durch höhere Fügung wurde der Forschung diese so ergebnissreiche Richtung vorgezeichnet, da doch kein Denker eine Vorahnung solcher Erfolge haben konnte.

Eine so merkwürdige Erscheinung könnte den idealistischen Glauben erwecken, dass die Analysis etwas irgendwie und unabhängig vom Dasein Denkender Vorhandenes sei, welches entdeckt und allmählig erforscht wird, wie ein neuer

Welttheil. Man möchte weiter hieraus schliessen, dass
eine Analysis möglich ist, so nämlich, dass, wenn sie von Ne
zu entdecken wäre, sie nur in derselben Gestalt wieder
scheinen könnte, während, falls die Menschheit in ei
Augenblick ihre sämmtlichen Sprachen vergässe, sie zwar
wiss wieder sprechen lernen würde, allein schwerlich in
ehemaligen Sprachen. Man kann aber auch im empiristisc
Sinne, d. i. ohne die Präexistenz der Mathematik vor
zusetzen, von der logischen Nothwendigkeit ihres jetzi
Inhalts überzeugt sein. Bedenkt man nämlich, wie ungezä
Denker in der Folge der Jahrhunderte am mathematisc
Gestein gebohrt, so leuchtet ein, dass an allen erdenklic
Stellen einzudringen versucht wurde, und dass schliess
die ergebnissreichsten Richtungen gefunden werden muss
Nur diese wurden dauernd verfolgt. Bei einer derarti
Selection musste die Forschung im Allgemeinen die Bahn
grössten Erfolges innehalten, wodurch ihr allerdings eine
stimmte Richtung vorgezeichnet wurde.

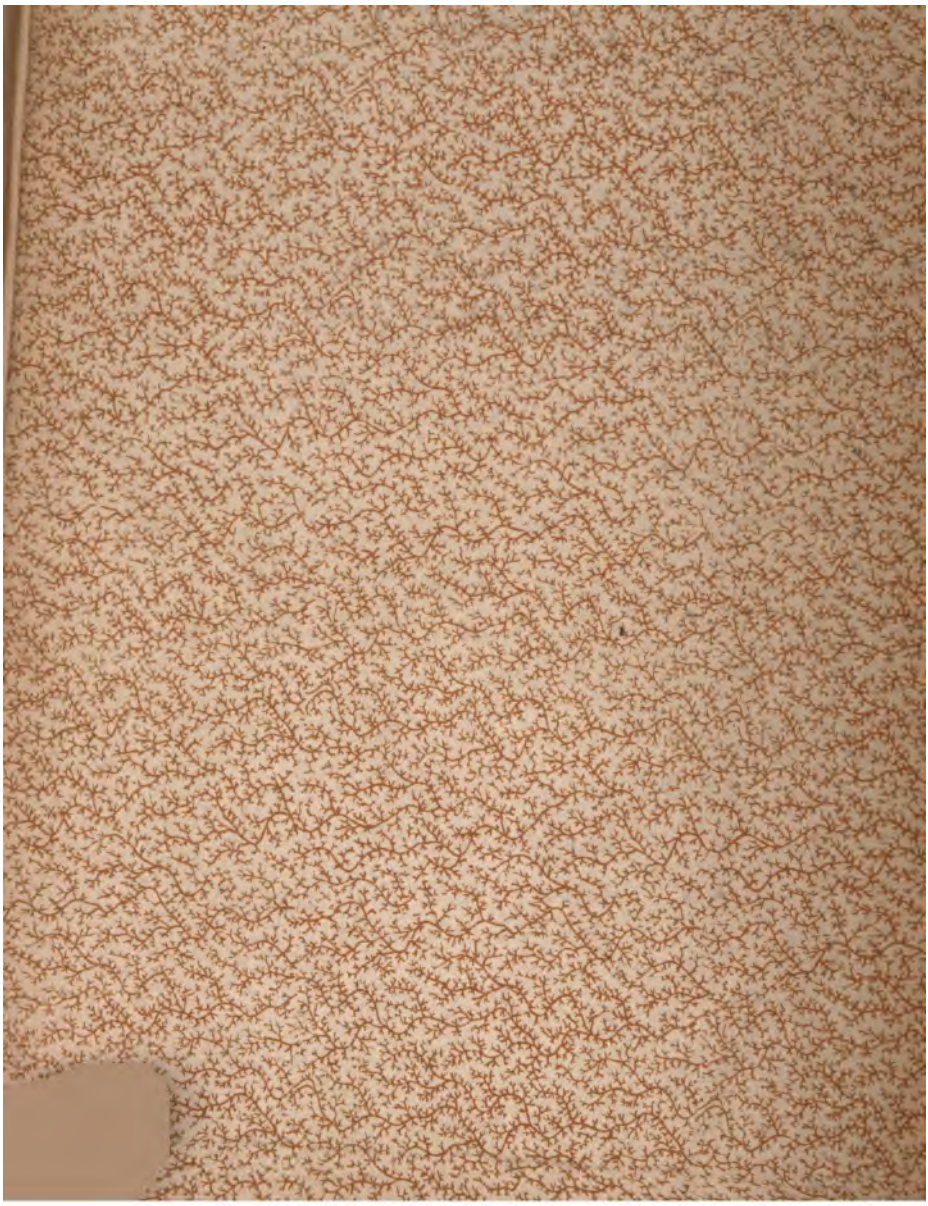
So rechtfertigt sich für die gesammte Analysis der A
spruch des Empiristen (pag. 128), dass wenn die Marsbewoh
eine Analysis besitzen, sie der unsrigen in allem Wesentlic
gleichen muss.

VERLAG DER H. LAUPP'SCHEN BUCHHANDLUNG IN TÜBINGEN.

ZUR GESCHICHTE DER
TRIGONOMETRISCHEN REIHEN.
EINE ENTGEGNUNG
VON
PAUL DU BOIS-REYMOND.
62 Stn. gr. 8. broch. M. 1. 50.

DER GEGENWÄRTIGE STANDPUNCT DER
MATHEMATISCHEN PHYSIK.
VON
PROF. DR. CARL NEUMANN.
32 Stn. gr. 8. broch. M. — 60.

LOGARITHMISCH-TRIGONOMETRISCHE TAFELN
MIT 4 STELLEN
HERAUSGEGEBEN VON
PROF. DR. J. ZECH.
50 S. kl. 8. broch. M. 1. 50.

DR. F. KOMMERELL'S
LEHRBUCH DER STEREOMETRIE.
VIERTE UMGEARBEITETE AUFLAGE.
HERAUSGEGEBEN VON
DR. GUIDO HAUCK,
PROFESSOR AN DER KGL. BAU-AKADEMIE BERLIN.
XV. 216 Stn. gr. 8. broch. M. 2. 40.

DR. F. KOMMERELL'S
LEHRBUCH DER EBENEN GEOMETRIE
HERAUSGEGEBEN VON
PROF. FINCK
AN DER REALSCHULE IN TÜBINGEN.
Erscheint demnächst in gänzlich umgearbeiteter Auflage!